ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 5-9-18

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Υπολογίστε το πλαίσιο Frenet, την καμπυλότητα και τη στρέψη της καμπύλης

$$\gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}t). \quad [\mathbf{15}]$$

2. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Frenet για να δείξετε ότι η γ είναι επίπεδη εάν και μόνο εάν η στρέψη της είναι ταυτοτικά μηδέν. **[20]**

3. **(α)** Έστω $f : M_1 \to M_2$ λεία απεικόνιση μετάξυ κανονικών επιφανειών. Δώστε τον ορισμό του διαφορικού df_p της f σε ένα σημείο $p \in M_1$. **[5]**

(β) Έστω M κανονική επιφάνεια. Υπολογίστε το διαφορικό της απεικόνισης $f : M \to \mathbb{R}$, $f(p) = ||p||^2$ σε ένα τυχαίο σημείο $p \in M$. **[10]**

4. Δίνεται η ελικοειδής επιφάνεια M με παραμέτρηση $X(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$. Υπολογίστε τα εξής:

(α) Τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης της M. **[10]**

(β) Τον πίνακα του τελεστή σχήματος ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$, τις κύριες καμπυλότητες, τη μέση καμπυλότητα και την καμπυλότητα Gauss της M. **[15]**

(γ) Δείξτε ότι η κάθετη καμπυλότητα της έλικας $\gamma(v) = (c\cos v, c\sin v, v)$ που βρίσκεται επάνω στην M, είναι παντού μηδέν. **[5]**

5. **(α)** Έστω M προσανατολισμένη επιφάνεια με τελεστή σχήματος S_p, μέση καμπυλότητα $H(p)$ και καμπυλότητα Gauss $K(p)$ σε ένα σημείο $p \in M$. Αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση

$$S_p^2 - 2H(p)S_p + K\mathrm{Id} = 0,$$

όπου Id η ταυτοτική απεικόνιση. **[10]**

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $X \in T_pM$ ισχύει

$$||S_p(X)||^2 - 2H(p)\mathrm{II}_p(X, X) + K(p)\mathrm{I}_p(X, X) = 0,$$

όπου $\mathrm{I}_p, \mathrm{II}_p : T_p \times T_pM \to \mathbb{R}$ η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφής αντίστοιχα. **[10]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!