Απαντήσεις Θεμάτων στην Αλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Ιουλίου 2018

Γενικά σχόλια: Πάρα πολλοί βαθμολογούνται με το βαθμό 3 (τρία). Αυτό συμβαίνει γιατί, συνήθως, παίρνουν μία μονάδα από το θέμα 1Α., δύο από το θέμα 4 και δε γράφουν σωστά κάτι άλλο. Οσοι έχουν γράψει σωστά ένα ακόμα ερώτημα όπως, συνήθως, την αιτιολόγηση ότι το J είναι ιδεώδες στο 2Α. (ακόμα κι αν δεν απαντούν σωστά το αν είναι κύριο) ή το 3Α. ή το 4Α. (ότι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_{10}$ είναι κλάσεις $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{7}$, $\bar{9}$ και ότι η ομάδα που απαρτίζουν παράγεται από την κλάση $\bar{3}$), παίρνουν προβιβάσιμο βαθμό.

Θέμα 1: Α. Να αναλύσετε σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων ή, διαφορετικά, να πείτε γιατί είναι ανάγωγα τα παρακάτω πολυώνυμα στα αντίστοιχα σύνολα:

$$x^8 + 27 \text{ στο } \mathbb{R}[x], \quad x^5 - 6x^4 - 9x^2 + 12x - 3 \text{ στο } \mathbb{Q}[x], \quad x^3 - x^2 - 1 \text{ στο } \mathbb{Z}_3[x].$$

Β. Να εξετάσετε αν το στοιχείο $1 + 4i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[i]$ (δηλαδή αν, όποτε γράφεται ως γινόμενο δύο στοιχείων, το ένα άπό αυτά πρέπει να είναι αντιστρέψιμο). Είναι σώμα το $\mathbb{Z}[i]/ < 1+4i >$;

Λύση: Α. Το πρώτο πολυώνυμο δεν είναι ανάγωγο: Εχουμε δει πως τα μόνα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα. Αφού έχει οκτώ ρίζες στους μιγαδικούς αριθμούς, οι οποίες είναι ανά δύο συζυγείς, παραγοντοποιείται ως γινόμενο τεσσάρων δευτεροβάθμιων παραγόντων της μορφής $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$, όπου $z = a + bi$ μία μιγαδική ρίζα του πολυωνύμου.

Σχόλιο: Στο ερώτημα αυτό υπήρξε πολύ μεγάλη αδυναμία απάντησης γι αυτό και δε βαθμολογείται. Οσοι γράφουν τουλάχιστον ότι δεν είναι ανάγωγο, παίρνουν επιπλέον μονάδες στο συγκεκριμένο θέμα.

Το δεύτερο πολυώνυμο είναι ανάγωγο, όπως προκύπτει με απευθείας εφαρμογή του κριτηρίου του Eisenstein για $p = 3$.

Το τρίτο πολυώνυμο έχει ρίζα το στοιχείο $\bar{2}$ (προφανής υπολογισμός), οπότε διαιρείται με το $x - \bar{2}$ και βρίσκουμε ότι $x^3 - x^2 - 1 = (x - \bar{2})(x^2 + x + \bar{1})$. Το $x^2 + x + \bar{1}$ είναι ανάγωγο αφού είναι δευτέρου βαθμού χωρίς ρίζες στο $\mathbb{Z}_3$.

Συνηθισμένα λάθη: Στο πρώτο πολυώνυμο πολλοί παρατηρούν ότι δεν έχει ρίζα στους πραγματικούς αριθμούς και αρκούνται σε αυτό για να πουν ότι είναι ανάγωγο. Αυτό είναι λανθασμένο αφού μόνο πρωτοβάθμια πολυώνυμα ή δευτεριβάθμια πολυώνυμα με αρνητική διακρίνουσα είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}[x]$.

Στο τρίτο πολυώνυμο απαντάται το λάθος $f(\bar{2}) = \bar{3} \neq \bar{0}$, άρα το πολυώνυμο δεν έχει ρίζα. Επίσης πολλοί κάνουν την αιτιολόγηση ότι το $x^2 + x + \bar{1}$ δεν έχει ρίζα γιατί η διακρίνουσά του είναι αρνητική. Φυσικά αυτό είναι λάθος αφού δεν υπάρχει διάταξη συμβιβαστή με τις πράξεις του $\mathbb{Z}_3$ ώστε να βγάζει νόημα μία τέτοια αιτιολόγηση.

Β. Αν το $1+4i$ γραφόταν ως $1+4i = a \cdot b$ με τα a, b μη αντιστρέψιμα θα είχαμε, εφαρμόζοντας τη νόρμα N ότι

$$17 = 1^2 + 4^2 = N(1+4i) = N(a) \cdot N(b).$$

Αφού ο 17 είναι πρώτος, κάτι τέτοιο δίνει $N(a) = 1$ ή $N(b) = 1$ δηλαδή ότι ένα εκ των a, b είναι ένα εκ των 1, -1, i, $-i$ που είναι ακριβώς τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}[i]$. Άρα το $1+4i$ είναι ανάγωγο.

Αφού το $1+4i$ είναι ανάγωγο σε έναν Ευκλείδιο δακτύλιο, που επομένως είναι και περιοχή κυρίων ιδεωδών, το ιδεώδες που παράγει είναι μεγιστικό, άρα ο δακτύλιος - πηλίκο προς αυτό είναι σώμα.

Συνηθισμένα λάθη: Πολλοί γράφουν ότι, αφού το $1+4i$ είναι ανάγωγο (στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων χωρίς να το έχουν αποδείξει, πάντως), ο δακτύλιος - πηλίκο προς το ιδεώδες που αυτό παράγει είναι σώμα, χωρίς να αιτιολογούν γιατί συμβαίνει αυτό. Κάποιοι άλλοι, δυστυχώς, αδυνατούν να διακρίνουν μεταξύ των δακτυλίων $\mathbb{Z}[i]$ και $\mathbb{Z}[x]$, και αντιμετωπίζουν το στοιχείο $1+4i$ ωσαν να ήταν πολυώνυμο, λέγοντας ότι είναι ανάγωγο ως πρώτου βαθμού.

Θέμα 2: Α. Δίνεται ότι το I είναι ιδεώδες του πολυωνυμικού δακτυλίου $A[x]$ (A αντιμεταθετικός δακτύλιος). Να αποδειχτεί ότι το σύνολο J των σταθερών όρων των πολυωνύμων που βρίσκονται στο I είναι ιδεώδες του δακτυλίου A. Αν το I είναι κύριο, είναι κύριο και το J;

Β. Δίνονται δύο ομάδες G, H και μία κανονική υποομάδα $K \trianglelefteq G \times H$. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$K^* = \{g \in G \mid (g,1) \in K\}$$

αποτελεί κανονική υποομάδα της G.

Λύση: Α. Το 0 ανήκει στο J ως σταθερός όρος του μηδενικού πολυωνύμου, το οποίο ανήκει στο ιδεώδες I.

Αν a_0, b_0 στοιχεία του J, που σημαίναι ότι είναι, αντίστοιχα, σταθεροί όροι των πολυωνύμων $f(x) \in I$, $g(x) \in I$, τότε το $a_0 - b_0$ είναι σταθερός όρος του πολυωνύμου $f(x) - g(x)$, το οποίο ανήκει στο I, αφού το τελευταίο είναι ιδεώδες.

Αν $a_0 \in J$ και $c \in A$, τότε το a_0 είναι σταθερός όρος κάποιου πολυωνύμου $f(x) \in I$. Αφού το I είναι ιδεώδες το γινόμενο του $f(x)$ με το σταθερό πολυώνυμο $c \in A[x]$ ανήκει στο I. Το πολυώνυμο αυτό έχει σταθερό όρο ca_0. Άρα το ca_0 ανήκει στο J. Δείχθηκε λοιπόν ότι το J είναι ιδεώδες του A.

Αν το I είναι κύριο, τότε απαρτίζεται από πολλαπλάσια ενός πολυωνύμου $f(x)$ με σταθερό όρο a_0. Αν το στοιχείο $b \in A$ βρίσκεται στο J, τότε βρίσκεται εκεί ως σταθερός όρος ενός πολυωνύμου $g(x) \in I$. Αυτό σημαίνει ότι $g(x) = f(x) \cdot h(x)$, για κάποιο $h(x) \in A[x]$, οπότε $b = a_0 \cdot c$, όπου c είναι ο σταθερός όρος του $h(x)$. Επομένως κάθε στοιχείο του J είναι πολλαπλάσιο του a_0, δηλαδή το J είναι σε αυτήν την περίπτωση κύριο.

Συνηθισμένα λάθη: Απαντάται μεγάλη δυσκολία επιχειρηματολόγησης με ορθή σειρά δεδομένων και ζητούμενων. Απαντώνται συμβολιστικά προβλήματα που δημιουργούν τεράστια σύγχυση, όπως η χρήση του συμβόλου x τόσο ως πολυωνυμικής μεταβλητής, όσο και ως στοιχείου του I ή του J, κατά περίπτωση. Σχεδόν κανείς δε μπορεί να δει, και να αξιοποιήσει σχετικώς, το γεγονός ότι το τυχαίο $c \in A$ είναι και στοιχείο του $A[x]$.

Β. Θέλουμε να δείξουμε ότι, αν $k \in K^*$ και $g \in G$, τότε υπάρχει $g' \in G$ ώστε $gh = hg'$. Αφού $k \in K^*$, τότε $(k,1) \in K$ κι αφού η K είναι κανονική υποομάδα της $G \times H$, τότε για το $(k,1) \in K$ και το $(g,1) \in G \times H$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει στοιχείο $(g',h) \in G \times H$ ώστε $(k,1) \cdot (g,1) = (g',h) \cdot (k,1)$, δηλαδή $kg = g'k$ και $1 = h$. Προκύπτει λοιπόν το ζητούμενο.

Συνηθισμένο λάθος: Πάρα πολλοί πολλαπλασιάζουν στοιχεία της G με ζεύγη στοιχείων (στοιχεία της $G \times H$), πράγμα που δε βγάζει νόημα. Για πολλούς επίσης η χρήση των ποσοδεικτών στη διατύπωση της συνθήκης της κανονικότητας θεωρείται περιττή!

Θέμα 3: Εστω K ένα σώμα και θεωρείστε $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ τέτοια ώστε μκδ$(f(x), g(x)) = 1$.

Α. Αποδείξτε ότι, αν $f(x)|g(x)h(x)$, τότε $f(x)|h(x)$.

Β. Εξηγείστε γιατί υπάρχει ομομορφισμός

$$K[x] \to \frac{K[x]}{< f(x) >} \times \frac{K[x]}{< g(x) >}$$

ο οποίος είναι επί (περιγράψτε τον) και βρείτε τον πυρήνα του.

Λύση: Α. Από το γεγονός ότι τα $f(x)$, $g(x)$ είναι σχετικώς πρώτα έπεται ότι υπάρχουν $f_1(x)$, $g_1(x) \in K[x]$ τέτοια ώστε $f(x) \cdot f_1(x) + g(x) \cdot g_1(x) = 1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $h(x)$ παίρνουμε

$$h(x) \cdot f(x) \cdot f_1(x) + h(x) \cdot g(x) \cdot g_1(x) = h(x)$$

και, γράφοντας $g(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot q(x)$ (αφού $f(x)|g(x) \cdot h(x)$) προκύπτει ότι

$$h(x) \cdot f(x) \cdot f_1(x) + f(x) \cdot q(x) \cdot g_1(x) = f(x) \cdot (h(x) \cdot f_1(x) + q(x) \cdot g_1(x)) = h(x),$$

δηλαδή το $f(x)$ διαρεί το $h(x)$.

Συνηθισμένο λάθος: Επειδή το αποτέλεσμα είναι αρκετά οικείο πολλοί απλώς δεν το αποδεικνύουν, απλώς το επαναδιατυπώνουν! Επίσης απαντάται το λάθος να θεωρούν ότι τα f_1, g_1 που χρησιμοποιούνται παραπάνω, είναι στοιχεία του K.

Β. Υπάρχουν οι συνηθισμένοι ομομορφισμοί $K[x] \to \frac{K[x]}{<f(x)>}$ και $K[x] \to \frac{K[x]}{<g(x)>}$, που απεικονίζουν το κάθε $h(x) \in K[x]$ στις αντίστοιχες κλάσεις του $h(x)+ < f(x) >$, $h(x)+ < g(x) >$, άρα ο ζητούμενος ομομορφισμός ομομορφισμός είναι ο $\varphi\colon K[x] \to \frac{K[x]}{<f(x)>} \times \frac{K[x]}{<g(x)>}$ με

$$\varphi(h(x)) = (h(x)+ < f(x) >, h(x)+ < g(x) >)$$

Επειδή οι ομομορφισμοί προβολής στο δακτύλιο-πηλίκο είναι επί, ο επαγόμενος φ θα είναι επί αν συντρέχουν οι προϋποθέσεις του Κινέζικου Θεωρήματος. Θέλουμε δηλαδή οι πυρήνες των ομομορφισμών που επάγουν τον φ να είναι ιδεώδη που το άθροισμά τους (το ελάχιστο ιδεώδες που περιέχει την ένω- σή τους) να ισούται με όλοκληρο το δακτύλιο $K[x]$, ισοδύναμα, να περιέχει το στοιχείο 1. Αυτό ακριβώς συμβαίνει γιατί μκδ$(f(x), g(x)) = 1$, οπότε υπάρχουν $f_1(x)$, $g_1(x) \in K[x]$ τέτοια ώστε $f(x) \cdot f_1(x) + g(x) \cdot g_1(x) = 1$ και το στοιχείο στ΄ αριστερά αυτής της ισότητας ανήκει στο ιδεώδες $< f(x) > + < g(x) >$.

Ο πυρήνας του φ είναι το σύνολο των $h(x) \in K[x]$ που οι κλάσεις τους ως προς τα ιδεώδη $< f(x) >$, $< g(x) >$, αντίστοιχα, είναι οι μηδενικές, δηλαδή είναι τέτοια που να ανήκουν και στα δύο αυτά ιδεώδη. Αρα $\mathrm{Ker}\varphi =< f(x) > \cap < g(x) >$.

Συνηθισμένα λάθη: Πολλοί μιλούν για κάποιον ομομορφισμό χωρίς να αναφέρουν ποιός είναι. Κάποιοι επικαλούνται το Κινέζικο Θεώρημα χωρίς να εξηγούν γιατί μπορεί να εφαρμοστεί στην παρούσα περίπτωση. Κάποιοι προσπαθούν να ορίσουν τον ομομορφισμό και σκοντάφτουν και εδώ σε συμβολιστικά προβλήματα. Δε δίνουν όνομα στο τυχαίο πολυώνυμο στο οποίο εφαρμόζεται ο φ διαφορετικό από $F(x)$. Ετσι, ενώ κάποιοι προχωρούν την απόπειρα περιγραφής του πυρήμα του φ, γράφουν πράγματα όπως $f(x) \in < f(x) >$, τα οποία ισχύουν ούτως ή άλλως και χάνουν τη χρήσιμη πληροφορία. Κάποιοι, δυστυχώς, εξακολουθούν να μη μπορούν να διατυπώσουν ορθά τη συνθήκη του επί.

Θέμα 4: Δίνεται η παρακάτω μετάθεση.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 8 & 5 & 1 & 2 & 7 & 11 & 12 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να αναλυθεί σε γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων. Να χαρακτηριστεί αν είναι άρτια ή περιττή. Να βρεθεί η τάξη της, η αντίστροφή της και η τάξη της αντίστροφής της.

Λύση: Κατά τα γνωστά η μετάθεση αναλύεται ως $\sigma = (1\ 4\ 5) \cdot (2\ 6) \cdot (3\ 11\ 10\ 9\ 12)$

Παρατηρούμε ότι αυτή η ανάλυση μας λέει πως η μετάθεση είναι άρτια και ότι η τάξη της είναι εκπ$(3, 2, 6) = 6$. Η αντίστροφή της δίνεται από τη σύνθεση των αντιστρόφων των κύκλων στους οποίους αναλύεται η σ. Αρα και η τάξη της αντίστροφης δίνεται ως εκπ των ίδιων αριθμών, δηλαδή είναι 6.

Συνηθισμένο λάθος: Διψήφιος αριθμός φοιτητών γράφει εκπ$(3, 2, 6) = 12$ ή $= 18$. Εκτός της κακής νοοτροπίας του μη - ελέγχου της ορθότητας όσων γράφονται στο γραπτό, ίσως το παραπάνω παιδαριώδες λάθος ανταναλκλά μία βασική παρανόηση, ότι δηλαδή το εκπ κάποιων αριθμών είναι ένας αριθμός αυστηρά μεγαλύτερος από αυτούς. Λοιπόν, δεν είναι έτσι, μπορεί να είναι ένας από αυτούς, εφόσον είναι πολλαπλάσιο όλων των άλλων!

Θέμα 5: Α. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_{10}$ αποτελεί κυκλική ομάδα.

Β. Να βρεθούν οι γεννήτορες της υποομάδας τάξης 9 μίας κυκλικής ομάδας τάξης 45.

Λύση: Α. Τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}_{10}$ είναι κλάσεις $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{7}$, $\bar{9}$, αφού οι 1, 3, 7, 9 είναι σχετικώς πρώτοι με το 10. Με απλές πράξεις παρατηρούμε ότι η ομάδα που απαρτίζουν πράγεται από την κλάση $\bar{3}$).

Β. Η υποομάδα τάξης 9 της κυκλικής C_{45} τάξης 45 παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $g^{\frac{45}{9}\cdot\lambda}$, όπου μκδ$(9, \lambda) = 1$, και g γεννήτορας της κυκλικής. Αρα, για $\lambda = 1, 2, 4, 5, 7, 8$, βρίσουμε, αντίστοιχα, τους γεννήτορες g^5, g^{10}, g^{20}, g^{25}, g^{35}, g^{40}.

Συνηθισμένο λάθος: Πολλοί γράφουν στο Α ότι, αφού υπάρχει n ώστε για κάθε αντιστρέψιμο x, $x^n = 1$, τότε η ομάδα είναι κυκλική. Αυτό δεν ισχύει: Η διεδρική ομάδα $D_2 = \{1, a, b, ab\}$ με $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$ αποτελεί αντιπαράδειγμα.