Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ - Ασκήσεις VI (Λύσεις)

Οι #6, #7, #1, #2 έχουν λυθεί στην τάξη.

#3. Η από κοινού πυκνότητα των X_1, X_2 είναι $f(x_1,x_2) = \frac{1}{6(2\pi)} e^{-\frac{1}{2\cdot 4}x_1^2 - \frac{1}{2\cdot 9}(x_2-1)^2}$, $x_i \in R$, $i=1,2$. Συγκρίνοντας με τον γενικό τύπο της (από κοινού) πυκνότητας διδιάστατης κανονικής προκύπτει ότι η από κοινού κατανομή των X_1, X_2 είναι η διδιάστατη κανονική $N_2(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ με $\underset{\sim}{\mu} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ και $\Sigma = \begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}$. Επομένως, και η από κοινού κατανομή των Y_1, Y_2 είναι $N_2(\underset{\sim}{v}, \Sigma_0)$ με $\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix}EY_1\\EY_2\end{pmatrix}$ και $\Sigma_0 = \begin{pmatrix}VarY_1 & Cov(Y_1,Y_2)\\ Cov(Y_1,Y_2) & VarY_2\end{pmatrix}$. $EY_1 = E(2X_1+X_2+1) = 2$, $EY_2 = E(X_1 - X_2) = -1$, $VarY_1 = 25$, $VarY_2 = 13$, $Cov(Y_1,Y_2) = 2VarX_1 - VarX_2 = -1$. Οι περιθώριες είναι κανονικές, $Y_1 \sim N(2,25)$, $Y_2 \sim N(-1,13)$. Η δεσμευμένη κατανομή $Y_2 | Y_1 = 0$ είναι κανονική $N(v_0, \sigma_0^2)$ όπου $v_0 = EY_2 + \rho\frac{\sqrt{VarY_2}}{\sqrt{VarY_1}}(y_1 - EY_1) = -1 + \frac{Cov(Y_1,Y_2)}{VarY_1}(0-2)$ $= -1 + \frac{2}{25} = -\frac{23}{25}$, και $\sigma_0^2 = (1-\rho^2)VarY_2 = (1-\frac{1}{25\cdot 13})13 = 13 - \frac{13}{25}$.

#4. (α) Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της λύσης της #2, Ασκήσεις V, $EX_1 = \overset{(n\cdot p)}{100\cdot 0.40} = 40$, $VarX_1 = \overset{(n\cdot p\cdot q)}{100 * 0.40 * 0.60} = 24$, επειδή $X_1 \sim B(n,p)$, $n=100$, $p=0.40$. (β) $P(X_1 > 30) = 1 - P(X_1 \le 30) = 1 - \sum_{x=0}^{30}\binom{100}{x}(0.40)^x\cdot(0.60)^{100-x}$.

Προσέγγιση μέσω ΚΟΘ: Η X_1 ως διωνυμική είναι άθροισμα $n=100$ ανεξαρτήτων και ισονόμων Bernoulli $B(1,p)$. Άρα $X_1 \approx N(\overset{=40}{np}, \overset{=24}{npq})$, και επομένως $P(X_1>30) = 1-P(X_1 \le 30) \simeq 1 - P\left(\frac{X_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{30-40}{\sqrt{24}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{24}}\right)$ $= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\right) \simeq \Phi(2.041) = 0.979$.

#5. Θέτουμε X = ποσότητα ραδιενέργειας που δέχεται εργαζόμενος κατά τη διάρκεια μιας ημέρας, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 0.1$ και $\sigma = 0.01$. Επίσης θέτουμε X_i την ποσότητα ραδιενέργειας την i ημέρα, $i=1,\dots,100$. Τότε $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι η συνολική ποσότητα που δέχεται στις $n=100$ ημέρες.

(α) $P(S_n > 10.02) = 1 - P(S_n \le 10.02) = 1 - P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le \frac{10.02 - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$ $\overset{ΚΟΘ}{\approx} 1 - P\left(Z \le \frac{10.02-10}{10*0.01}\right) = 1 - P(Z \le 0.2) = 1 - \Phi(0.2) \simeq 1 - .5793 = 0.4207$.

(β) Δίνεται ότι $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, όπου $\lambda = \frac{1}{EX} = \frac{1}{0.1} = 10$. Θεωρούμε ως "Επιτυχία" το ενδεχόμενο ο εργαζόμενος να δεχτεί ημερήσια ραδιενέργεια περισσότερη από τη μέση τιμή. Τότε $p = P(E) = P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda * 0.1} = e^{-1}$ $\simeq 0.368$. Ορίζουμε $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν την } i \text{ ημέρα η ραδιενέργεια} > \text{μέση τιμή} = 0.1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$, $i=1,\dots,600$.

Τότε $Y = \sum_{i=1}^{600} Y_i$ είναι ο αριθμός των ημερών (μεταξύ των 600) με ραδιενέργεια > 0.1, δηλ. $Y \sim B(n=600, p=e^{-1})$. Η κατανομή της Y προσεγγίζεται μέσω ΚΟΘ από $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = np$, $\sigma^2 = npq$. Άρα ζητάμε $P(Y \ge 252)$ $= 1 - P(Y \le 251) = 1 - P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \le \frac{251-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{251 - 600*0.368}{\sqrt{600*0.368*0.632}}\right) =$ $= 1 - \Phi(2.56) \simeq 1 - 0.9946 = 0.0054$.