Θεωρία Πιθανοτήτων ΙΙ – Ασκήσεις IV (Λύσεις)

#1(α), #4, #5, #6, #8, #11, #12, #14 έχουν λυθεί στην τάξη.

#1 (β) και (γ). (β) Όπως στην #1(α), αρκεί να υπολογιστούν EX, EY, $VarX$, $VarY$, $E(XY)$. $f_X(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy$, $0<x<1$, $EX=\int_0^1 x f_X(x)\,dx$, $E(X^2)=\int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx$, $VarX = E(X^2)-(EX)^2$. Λόγω συμμετρίας της από κοινού πυκνότητας, $EY=EX$, $VarY=VarX$. Τέλος, $E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy$.

(γ) Ανάλογα με το (β), $f_X(x)=\int_x^\infty e^{-y}\,dy = e^{-x}$, $x>0$, δηλ. $X\sim \mathcal{E}(1)$ και $EX=VarX=1$. $f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}\,dx = ye^{-y}$, $y>0$, δηλ. $Y\sim G(\alpha=2,\beta=1)$ και $EY=2$, $VarY=2$. Τέλος, $E(XY)=\int_0^\infty\int_0^y xye^{-y}\,dx\,dy=\int_0^\infty \frac{1}{2} y^3 e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma(4)=\frac{1}{2}\cdot 3! = 3$. Συνεπώς, $Cov(X,Y)=1$, $\rho_{X,Y}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $Var(3X-5Y+2)=29$.

#2. α. Έστω Z το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης, οπότε $Y=X+Z$, και $X-Y=-Z$. $Var(X-Y)=Var(-Z)=VarZ=E(Z^2)-(EZ)^2$. $EZ=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3$. $E(Z^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$. $\rho_{X,Y}=\rho_{X,X+Z}=$

$$=\frac{Cov(X,X+Z)}{\sqrt{VarX\cdot Var(X+Z)}}=\frac{VarX}{\sqrt{VarX\cdot 2VarX}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

επειδή X,Z ανεξάρτητες και έχουν κοινή κατανομή.

β. $Y=\nu-X$, $Var(X-Y)=Var(2X-\nu)=4VarX=4\nu pq$

$\rho_{X,Y}=\rho_{X,\nu-X}=-\rho_{X,X}=-1$ (αναμενόμενο, επειδή $Y=\alpha X+\beta$ με $\alpha<0$).

γ. Οι X,Y είναι ανεξάρτητες διακριτές με κοινή περιθώρια κατανομή $P(X=\alpha)=P(Y=\alpha)=1/2=P(X=-\alpha)=P(Y=-\alpha)$. Άρα $Var(X-Y)=VarX+VarY=2VarX=2\alpha^2$, $\rho_{X,Y}=0$ (λόγω ανεξαρτησίας).

#3. $VarU=Var(X+Y)=7$, $Var(Y+Z)=7$, $Cov(U,V)=Cov(X+Y,Y+Z)=Cov(Y,Y)=VarY=4$. $\rho_{U,V}=\frac{4}{\sqrt{7\cdot 7}}=\frac{4}{7}$.

#7. Είναι η ανισότητα C−S, αφού $EX=EY=0$.

#9. $Cov(3X+Y,\,Y+2Z)=VarY=20-16=4$.

#10. $f_X(x)=\frac{1}{4}$, $x=-4,-2,2,4$, $EX=0$, $f_Y(y)=\frac{1}{4}$, $y=-2,-1,1,2$, $EY=0$ (δεν χρειάζεται), οπότε $P(X=-4,Y=1)=\frac{1}{4}\neq P(X=-4)P(Y=1)=\frac{1}{16}$. $EXY=\sum_x\sum_y xyf(x,y)=-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot(-1)\frac{1}{4}+2\cdot 2\cdot\frac{1}{4}+(-2)(-2)\frac{1}{4}=0$.

#13. Είναι η τριγωνική ανισότητα (ιδιότητα) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ κατ' ευθείαν: υψώνοντας στο τετράγωνο, $Var(X+Y)\le(\sqrt{VarX}+\sqrt{VarY})^2 \Leftrightarrow VarX+VarY+2Cov(X,Y)\le VarX+VarY+2\sqrt{VarX}\cdot\sqrt{VarY}\Leftrightarrow Cov(X,Y)\le\sqrt{VarX}\cdot\sqrt{VarY}$, που ισχύει λόγω της ανισότητας C−S.