ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ$*$ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ $*$ ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι (ΠΤΥΧΙΟ) 4-6-18

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. **(α)** Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα μιας τυχαίας καμπύλης $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ δίνεται από τη σχέση

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}. \qquad \textbf{[10]}$$

(β) Υπολογίστε την καμπυλότητα της καμπύλης $\gamma(t) = (e^t, t^2, t^3)$. **[10]**

2. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Frenet για να δείξετε ότι η γ είναι επίπεδη εάν και μόνο εάν η στρέψη της είναι ταυτοτικά μηδέν. **[20]**

3. **(α)** Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Πότε ένα σημείο $q \in f(U)$ ονομάζεται *κανονική τιμή* της f; **[10]**

(β) Αποδείξτε ότι η σφαίρα $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ είναι μια κανονική επιφάνεια. **[10]**

4. Δίνεται η επιφάνεια M με τοπική παραμέτρηση $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, uv), v > 0$. Υπολογίστε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης της M και την καμπυλότητα Gauss. **[16]**

5. Έστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη και $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ λεία συνάρτηση με $\beta(u) \neq 0$ για κάθε $u \in I$. Θεωρούμε την ευθειογενή επιφάνεια M με τοπική παραμέτρηση

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u), \qquad u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η M έχει καμπυλότητα Gauss παντού μη θετική, δηλαδή ισχύει $K \leq 0$. **[10]**

6. Για τις παρακάτω προτάσεις απαντήστε αν είναι αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ): **[14]**

(α) Μια τοπική ισομετρία μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρεί τις πρώτες θεμελιώδεις μορφές.

(β) Μια τοπική ισομετρία μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρεί τις δεύτερες θεμελιώδεις μορφές.

(γ) Μια τοπική ισομετρία μεταξύ κανονικών επιφανειών διατηρεί τις καμπυλότητες Gauss.

(δ) Υπάρχει απλή και κλειστή καμπύλη με μήκος 4π και εμβαδό που περικλείει 4π.

(ε) Οι κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο του επιπέδου είναι ίσες.

(στ) Οι κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο του κυλίνδρου είναι ίσες.

(ζ) Οι κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο της σφαίρας είναι ίσες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!