Ανάλυση Μεταθέσεων σε Γινόμενο Ξένων Κύκλων

Π. Καραζέρης

10 Ιουνίου 2015

Σκοπός μας εδώ είναι να παρουσιάσουμε λεπτομερώς την απόδειξη του παρακάτω βασικού θεωρήματος (για την ακρίβεια θα παρουσιάσουμε μόνο την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού παρακάτω).

1 Θεώρημα. *Κάθε μη-ταυτοτική μετάθεση ενός πεπερασμένου συνόλου με n στοιχεία αναλύεται σε γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων. Η ανάλυση αυτή είναι μοναδική με προσέγγιση αντιμετάθεσης των κύκλων (αφού είναι ξένοι κι επομένως αντιμετατίθενται μεταξύ τους).*

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων που δε μένουν σταθερά από μια μετάθεση σ.

Αν το πλήθος των στοιχείων που δε μένουν σταθερά από τη μετάθεση είναι 2, τότε η μετάθεση είναι από μόνη της ένας κύκλος που αντιμεταθέτει τα δύο αυτά στοιχεία.

Αν το πλήθος των στοιχείων που δε μένουν σταθερά από τη μετάθεση είναι k, υποθέτουμε ότι κάθε μετάθεση που δεν αφήνει σταθερά λιγότερα από k στοιχεία γράφεται ως γινόμενο ξένων κύκλων.

Ξεκινάμε λοιπόν από οποιοδήποτε στοιχείο x δε μένει σταθερό από τη μετάθεση. Αφού το σύνολο στο οποίο δρα η μετάθεση είναι πεπερασμένο μετά από κάποιο πλήθος εφαρμογών της σ στο x θα ξαναβρούμε το x: Η σ είναι ένα - προς - ένα άρα αν γράψουμε τα στοιχεία $x, \sigma(x), \sigma^2(x), ..., \sigma^n(x)$ (που είναι $n+1$ το πλήθος), δύο απ′ αυτά θα είναι ίσα. Απαλοίφοντας κατάλληλη δύναμη της σ (αφού είναι αντιστρέψιμη) θα βρούμε μια δύναμη της σ να δίνει $\sigma^l(x) = x$. Θεωρούμε λοιπόν τον κύκλο

$$\tau = (x\ \sigma(x)\ ...\ \sigma^{l-1}(x))$$

Ισχυριζόμαστε ότι η μετάθεση $\tau^{-1}\sigma$ έχει περισσότερα σταθερά σημεία από τη σ. Γιατί αν y είναι τέτοιο ώστε $\sigma(y) = y$ τότε: Αν η τ δεν το άφηνε σταθερό, επειδή τα μόνα στοιχεία που δεν αφήνει σταθερά η τ είναι, εξ ορισμού, εκείνα του παραπάνω κύκλου, το y θα είναι ένα από τα x, ..., $\sigma^{l-1}(x)$. Σε αυτήν την περίπτωση όμως το $y = \sigma^r(x)$, $0 \leq r \leq l-1$, δε θα ήταν σταθερό σημείο της σ, άτοπο. Αρα τα σταθερά σημεία της σ είναι και σταθερά σημεία της $\tau^{-1}\sigma$. Επιπλέον, οτιδήποτε είναι στον κύκλο τ (που προφανώς δεν είναι σταθερό σημείο της σ) είναι και σταθερό σημείο της $\tau^{-1}\sigma$, αφού για ένα τέτοιο y είναι $\tau^{-1}\sigma(y) = \sigma^{-1}\sigma(y) = y$. Αρα η $\tau^{-1}\sigma$ έχει λιγότερα από k μη σταθερά σημεία και εφαρμόζεται γι΄ αυτήν η επαγωγική υπόθεση.

Εχουμε λοιπόν ότι $\tau^{-1}\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_s$, όπου σ_i , $i = 1, ..., s$ είναι ξένοι μεταξύ τους κύκλοι. Επειδή τώρα είναι

$$\sigma = \tau\sigma_1\sigma_2...\sigma_s$$

θα έχουμε τελειώσει την απόδειξη αν δείξουμε κι ότι ο οποιοσδήποτε από τους κύκλους σ_i είναι ξένος κι ως προς τον τ.

Αν λοιπόν για τη μετάθεση σ_i έχουμε $\sigma_i(y) \neq y$ πρέπει να δείξουμε ότι $\tau(y) = y$. Πρώτα απ΄ όλα, το γεγονός ότι $\sigma_i(y) \neq y$ σημαίνει ότι, κατ΄ αρχήν $\sigma_i(\sigma_i(y)) \neq \sigma_i(y)$, αφού η σ_i είναι ένα - προς - ένα. Ομως η σ_{i-1} είναι ξένη προς τη σ_i και άρα $\sigma_{i-1}(\sigma_i(y)) = \sigma_i(y)$. Η σ_{i-2} είναι επίσης ξένη προς τη σ_i, επομένως θα έχουμε και $\sigma_{i-2}(\sigma_i(y)) = \sigma_i(y)$, άρα και

$$\sigma_{i-2}(\sigma_{i-1}(\sigma_i(y))) = \sigma_{i-2}(\sigma_i(y)) = \sigma_i(y)$$

Προχωρώντας έτσι βρίσκουμε τελικά ότι

$$\sigma_1 \cdots \sigma_i(y) = \sigma_i(y)$$

Επίσης, επειδή οι $\sigma_{i+1}, \ldots , \sigma_s$ είναι ξένες προς τη σ_i, έχουμε $\sigma_{i+1}(y) = y, \ldots , \sigma_s(y) = y$. Αρα εν τέλει

$$\tau^{-1}\sigma(y) = \sigma_1\sigma_2...\sigma_s(y) = \sigma_i(y)$$

Αν, από την άλλη πλευρά, υποθέταμε -προς άτοπο - ότι $\tau(y) \neq y$, θα έπρεπε να έχουμε $y = \sigma^r(x)$, για κάποιο $r \in \{0, ..., l-1\}$. Αυτό θα σήμαινε

$$\tau^{-1}\sigma(y) = \tau^{-1}\sigma\sigma^r(x) = \sigma^r(x) = y$$

Ομως $\tau^{-1}\sigma(y) = \sigma_i(y) \neq y$, οπότε έχουμε πράγματι άτοπο. Αρα $\tau(y) = y$, όπως επιθυμούσαμε. ∎