# ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα **Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων** (ΣΣΔΕ). Για λόγους απλότητας, θα αναφερθούμε σε ΣΣΔΕ δύο εξισώσεων, αλλά οι ιδιότητες και οι μέθοδοι, που θα αναφέρουμε γενικεύονται και για ΣΣΔΕ περισσοτέρων εξισώσεων.

**Ορισμός:** Ένα ΣΣΔΕ, με δύο αγνώστους, που έχει παραγώγους μόνο πρώτης τάξης, έχει την μορφή:

$$\begin{aligned} &F_1(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) = 0 \\ &F_2(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) = 0, \end{aligned} \tag{Σ1}$$

όπου $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x_i(t) : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, συναρτήσεις, που έχουν παραγώγους τουλάχιστον πρώτης τάξης και $F_i : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, και $\Omega \subset \mathbb{R}^4$.

**Ορισμός: Γενική λύση** του συστήματος (Σ1), στην περιοχή $I \times \Omega$, λέγεται μια οικογένεια συναρτήσεων της μορφής:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = \phi_1(t, c_1, c_2) \\ &x_2(t) = \phi_2(t, c_1, c_2) \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $t \in I \subset \mathbb{R}$, και $c_i, i = 1, 2$ δοσμένες πραγματικές σταθερές, όταν για κάθε $c_i, i = 1, 2$ οι συναρτήσεις (1) ικανοποιούν το (Σ1) και κάθε λύση του (Σ1) προκύπτει από την (1), για κατάλληλη επιλογή των σταθερών $c_i, i = 1, 2$.

Ως αρχικές συνθήκες, για το ανωτέρω ΣΣΔΕ, θεωρούμε τις συνθήκες:

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \tag{2}$$

με $t \in I \subset \mathbb{R}$, και $x_{i,0}, i = 1, 2$ δοσμένες πραγματικές σταθερές.

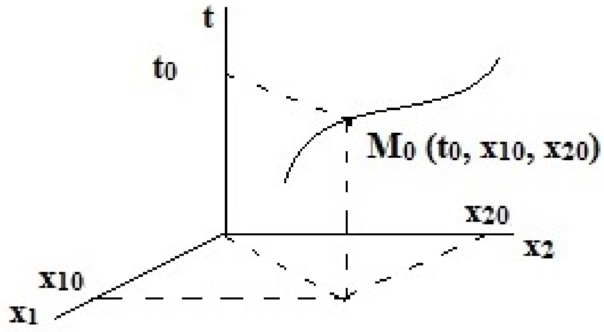
**Ορισμός:** Το ΣΣΔΕ (Σ1) με τις αρχικές συνθήκες (2), λέμε ότι αποτελεί **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών** (ΠΑΤ).

**Ορισμός: Κανονική μορφή** του ΣΣΔΕ πρώτης τάξης, με δύο αγνώστους, (Σ1), είναι η μορφή:

$$\begin{aligned} &x_1'(t) = f_1\big(t, x_1(t), x_2(t)\big) \\ &x_2'(t) = f_2\big(t, x_1(t), x_2(t)\big) \end{aligned} \tag{Σ2}$$

**Θεώρημα:** Αν οι συναρτήσεις $f_i, i = 1, 2$ του συστήματος (Σ2), καθώς και οι μερικές παράγωγοι αυτών ως προς $x_i, i = 1, 2,$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε μια περιοχή του σημείου $(t, x_{1,0}, x_{2,0})$, τότε το ΠΑΤ (Σ2), (2) έχει μοναδική λύση.

Η λύση $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, του συστήματος (Σ2), που ικανοποιεί τις συνθήκες (2) ορίζει μια καμπύλη στο χώρο, που περνάει από το σημείο $M(t_0, x_{1,0}, x_{2,0})$. Αυτή καλείται **ολοκληρωτική καμπύλη** του συστήματος (Σ2).




**Ορισμός:** Αν οι συναρτήσεις $f_i, i = 1, 2$ του συστήματος (Σ2), είναι γραμμικές συναρτήσεις, ως προς $x_i(t), i = 1, 2$ το σύστημα (Σ2) λέγεται **γραμμικό ΣΣΔΕ**.

Η μορφή του γραμμικού ΣΣΔΕ πρώτης τάξης με δύο αγνώστους είναι:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + b_2(t) \end{aligned} \tag{Σ3}$$

όπου οι συναρτήσεις $a_{ij}(t), i, j = 1, 2$ και $b_i(t), i = 1, 2$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, για $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Το σύστημα (Σ3) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{Σ4}$$

όπου $X(t), A(t), B(t)$ είναι οι πίνακες:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ και } B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Αν οι συναρτήσεις $b_i(t) = 0, i = 1, 2$ δηλαδή $B(t) = 0$,το ΣΣΔΕ (Σ3) ή (Σ4) λέγεται **ομογενές**, άλλως, **μη ομογενές**.

Αν $a_{ij}(t) = a_{ij}$, με $a_{ij}, i, j = 1, 2$ πραγματικές σταθερές, τότε το ΣΣΔΕ (Σ3) λέγεται **γραμμικό ΣΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές**, άλλως, **γραμμικό ΣΣΔΕ με μη σταθερούς συντελεστές**.

**Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών ΣΣΔΕ πρώτης τάξης, με δύο αγνώστους**

**1) Μέθοδος απαλοιφής**

Σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε από το δοθέν σύστημα (Σ3) μια ΣΔΕ ως προς τη μία άγνωστη συνάρτηση, να την επιλύσουμε και μετά να αντικαταστήσουμε (συνήθως σ' αυτήν που δεν περιέχει την παράγωγο της άλλης άγνωστης συνάρτησης). Ο τρόπος για να επιτύχουμε τον σκοπό μας, εξαρτάται από τη μορφή του συστήματος. Συνήθως, παραγωγίζουμε μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος (Σ3) και χρησιμοποιώντας την άλλη, καθώς και την αρχική, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μια γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης, ως προς τη μία άγνωστη συνάρτηση. Επιλύουμε την προκύπτουσα ΣΔΕ και μετά αντικαθιστούμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του (Σ3), και υπολογίζουμε και την δεύτερη συνάρτηση.

***Παράδειγμα 1.*** Να λυθεί το ΣΣΔΕ για $x \neq 0$

$$\begin{aligned} &xy_1'(x) = -y_1(x) + xy_2(x) && (1) \\ &x^2y_2'(x) = -2y_1(x) + xy_2(x) && (2) \end{aligned}$$

**Λύση.** Το δοθέν σύστημα μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} &y_1'(x) = -\frac{1}{x}y_1(x) + y_2(x) && (3) \\ &y_2'(x) = -\frac{2}{x^2}y_1(x) + \frac{1}{x}y_2(x) && (4) \end{aligned}$$

Θέλουμε να απαλείψουμε την $y_2(x)$. Παραγωγίζουμε την (3) ως προς $x$, οπότε:

$$(3) \Rightarrow y_1''(x) = \frac{1}{x^2}y_1(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) + y_2'(x) \qquad (5)$$

Αντικαθιστούμε στην (5) την $y_2'(x)$ από την (4):

$$(5) \overset{(4)}{\Longrightarrow} y_1''(x) = \frac{1}{x^2}y_1(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) - \frac{2}{x^2}y_1(x) + \frac{1}{x}y_2(x)$$

$$\Rightarrow y_1''(x) = -\frac{1}{x^2}y_1(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x}y_2(x) \qquad (6)$$

Στην (6) αντικαθιστούμε την $y_2(x)$ από την (3), οπότε προκύπτει:

$$y_1''(x) = -\frac{1}{x^2}y_1(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x}\left(y_1'(x) + \frac{1}{x}y_1(x)\right) \Rightarrow$$

$$y_1''(x) = -\frac{1}{x^2}y_1(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x^2}y_1(x) \Rightarrow$$

$$y_1''(x) = 0 \qquad (7)$$

Η προκύπτουσα ΣΔΕ (7) έχει για λύση την

$$y_1(x) = c_1 x + c_2 \qquad (8)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (3) την (8) και την παράγωγό της, θα βρούμε την $y_2(x)$.

Πράγματι: $(3) \overset{(8)}{\Longrightarrow} y_2(x) = c_1 + \frac{1}{x}(c_1 x + c_2) \Rightarrow y_2(x) = 2c_1 + \frac{c_2}{x} \qquad (9)$

Τελικά η λύση του ΣΣΔΕ (1),(2) είναι οι συναρτήσεις:

$$y_1(x) = c_1 x + c_2$$
$$y_2(x) = 2c_1 + \frac{c_2}{x} \quad c_1, c_2 \text{ :σταθερές}$$

***Παράδειγμα 2.*** Να λυθεί το ΣΣΔΕ:

$$y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x) \qquad (1)$$
$$y_2'(x) = y_2(x) - y_1(x) \qquad (2)$$

**Λύση.** Παρατηρούμε, ότι, αν προσθέσουμε τις (1) και (2) προκύπτει:

$(y_1(x) + y_2(x))' = 0 \Rightarrow y_1(x) + y_2(x) = c_1 \quad (3) \quad c_1$ : σταθερά.

Οπότε η (1) λόγω της (3) παίρνει τη μορφή:

$$(1) \overset{(3)}{\Longrightarrow} y_1'(x) = y_1(x) - c_1 + y_1(x) \Rightarrow y_1'(x) = 2y_1(x) - c_1 \Rightarrow$$

$y_1'(x) - 2y_1(x) = -c_1 \qquad (4)$

η οποία είναι γραμμική 1ης τάξης και δέχεται πολ/τή Euler :

$\mu(x) = e^{-2x}$

Άρα: $\left(e^{-2x}y_1(x)\right)' = -c_1e^{-2x} \Rightarrow e^{-2x}y_1(x) = \frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2 \Rightarrow$

$y_1(x) = \frac{c_1}{2} + c_2e^{2x} \qquad (5)$

Αντικαθιστούμε στην (1) την (5) οπότε:

$(1) \overset{(5)}{\Longrightarrow} y_2(x) = y_1(x) - y_1'(x) \Rightarrow y_2(x) = \frac{c_1}{2} + c_2e^{2x} + 2c_2e^{2x} \Rightarrow$

$y_2(x) = \frac{c_1}{2} + 3c_2e^{2x} \qquad (6)$

Οι συναρτήσεις (5) και (6) αποτελούν την λύση του συστήματος (1),(2).

***Παράδειγμα 3.*** Να λυθεί το ΣΣΔΕ:

$$\begin{aligned} x' - y &= t \\ x - y' &= -t \end{aligned}$$

**Λύση.** Το σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y + t \qquad (1) \\ y'(t) &= x + t \qquad (2) \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς $t$ οπότε:

$x'' = y' + 1 \qquad (3) \overset{(2)}{\Longrightarrow} x'' = x + t + 1 \Rightarrow x'' - x = t + 1$

Λύνουμε πρώτα την ομογενή ΣΔΕ της οποίας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$r^2 - 1 = 0$

Επομένως, η λύση της ομογενούς ΣΔΕ είναι:

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

Στη συνέχεια μένει να βρούμε την μερική λύση της ΣΔΕ η οποία έχει τη μορφή $x_\mu(t) = At + B$, κάνοντας αντικατάσταση αυτή και τη δεύτερη παράγωγό της στην ΣΔΕ, οπότε έχουμε:

$-At - B = t + 1 \Rightarrow A = -1, B = -1$

Άρα η μερική λύση είναι: $x_\mu(t) = -t - 1$

Η γενική λύση είναι: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t - 1 \qquad (4)$

Αντικαθιστούμε στην (1) την (4) οπότε:

$y = x' - t \Rightarrow y(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - 1 - t \qquad (5)$

Οι συναρτήσεις (4) και (5) αποτελούν την λύση του συστήματος (1),(2).

**2) Ομογενή ΣΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές**

Ένας τρόπος επίλυσης είναι η μέθοδος Euler.
Ζητούμε λύσεις της μορφής $x_1(t) = \nu_1 e^{\lambda t}, x_2(t) = \nu_2 e^{\lambda t}, \nu_1, \nu_2, \lambda$ : σταθερές.
Αν αντικαταστήσουμε στο ομογενές σύστημα (Σ3) παίρνουμε τις αλγεβρικές εξισώσεις:

$(a_{11} - \lambda)\nu_1 + a_{12}\nu_2 = 0$
$a_{21}\nu_1 + (a_{22} - \lambda)\nu_2 = 0$

που είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Για να έχει μη μηδενική λύση, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $|A - \lambda I| = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ και $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αυτή η εξίσωση λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος και οι τιμές του $\lambda$, για να ισχύει η ισότητα λέγονται ιδιοτιμές. Το $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$i)$ Αν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα,

$\tilde{\nu}_1 = \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix}$, $\tilde{\nu}_2 = \begin{pmatrix} \nu_{21} \\ \nu_{22} \end{pmatrix}$ οπότε η λύση του ομογενούς συστήματος θα είναι:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \nu_{21} \\ \nu_{22} \end{pmatrix}$$

$ii)$ Αν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τότε βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix}$ και ένα γενικευμένο $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$ οπότε η λύση είναι:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_1 t} \left( t \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} \right)$$

$iii)$ Αν $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ και $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ τα ιδιοδιανύσματα θα είναι μιγαδικά $\tilde{\nu}_1 = \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix}$, $\tilde{\nu}_2 = \begin{pmatrix} \nu_{21} \\ \nu_{22} \end{pmatrix}$ και η λύση:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t + i\beta t} \begin{pmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t - i\beta t} \begin{pmatrix} \nu_{21} \\ \nu_{22} \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $e^{i\beta t} = cos\beta t + isin\beta t$ μπορούμε να βρούμε τη λύση του συστήματος εκπεφρασμένη σε $cos\beta t$ και $sin\beta t$.

### 3) Μη ομογενή ΣΣΔΕ με σταθερούς συντελεστές

Λύνουμε πρώτα το αντίστοιχο ομογενές, και αφού βρούμε τη γενική του λύση, η μερική λύση του μη ομογενούς βρίσκεται με τρόπο ανάλογο με τις ΣΔΕ τις μη ομογενείς με σταθερούς συντελεστές (μέθοδος Lagrange).

Αν οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς είναι:

$e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ και $e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, και η λύση του ομογενούς συστήματος είναι:

$$\begin{pmatrix} x_{1,o}(t) \\ x_{2,o}(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Η μερική λύση του συστήματος θα έχει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} x_{\mu_1}(t) \\ x_{\mu_2}(t) \end{pmatrix} = c_1(t) e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Οπότε, αν αντικαταστήσουμε στο δοθέν σύστημα, προκύπτει ένα σύστημα με τις παραγώγους των $c_1(t), c_2(t)$. Το σύστημα αυτό είναι:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}u_1 + e^{\lambda_2 t}u_3 \\ e^{\lambda_1 t}u_2 + e^{\lambda_2 t}u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

Επιλύουμε το σύστημα ως προς $c_1'(t)$ και $c_2'(t)$ ολοκληρώνουμε, θεωρώντας την σταθερά ολοκλήρωσης μηδέν, αφού ψάχνουμε μια μερική λύση, αντικαθιστούμε στην $(*)$ και βρίσκουμε τη μερική λύση του συστήματος. Το άθροισμα της λύσης του ομογενούς και της μερικής λύσης του μη ομογενούς μας δίνει τη λύση του δοθέντος συστήματος.

***Παράδειγμα 4.*** Να λυθεί το ΣΣΔΕ :

$$x_1'(t) = 2x_1 + x_2 + 3e^{2t}$$
$$x_2'(t) = 2x_2 + 4e^{2t}$$

**Λύση** Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Άρα το 2 είναι διπλή ιδιοτιμή.
Το ένα ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται :

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_2 = 0 \\ u_1 = c \end{matrix}$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται :

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_4 = 1 \\ u_3 = c \end{matrix}$$

Επομένως το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Η λύση του ομογενούς συστήματος είναι :

$$\begin{pmatrix} x_{1,o}(t) \\ x_{2,o}(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$x_{1,o}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}(t+1)$$
$$x_{2,o}(t) = c_2 e^{2t}$$

Η μερική λύση θα είναι της μορφής :

$x_{1,\mu}(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{2t}(t+1)$
$x_{2,\mu}(t) = c_2(t)e^{2t}$

Λύνουμε το σύστημα:

$c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{2t}(t+1) = 3e^{2t}$
$c_2'(t)e^{2t} = 4e^{2t}$

$c_2'(t) = 4 \Rightarrow c_2(t) = 4t$

$c_1'(t) + 4t + 4 = 3 \Rightarrow c_1'(t) = -4t - 1 \Rightarrow c_1(t) = -2t^2 - t$

Οπότε:

$x_{1,\mu}(t) = (-2t^2 - t)e^{2t} + 4te^{2t}(t+1) \Rightarrow$
$x_{2,\mu}(t) = 4te^{2t} \Rightarrow$

$x_{1,\mu}(t) = (2t^2 + 3t)e^{2t}$
$x_{2,\mu}(t) = 4te^{2t}$

Η γενική λύση είναι:

$x_1(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{2t}(t+1) + (2t^2+3t)e^{2t} \Rightarrow$
$x_2(t) = c_2e^{2t} + 4te^{2t} \Rightarrow$

$x_1(t) = (c_1 + c_2 + (c_2+3)t + 2t^2)e^{2t}$
$x_2(t) = (c_2 + 4t)e^{2t}$

***Παράδειγμα 5.*** Να λυθεί το ΣΣΔΕ:

$x'(t) = x(t) + 2y(t) + t$
$y'(t) = 2x(t) + y(t) + t$

**Λύση** Το δοθέν σύστημα γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2-4=0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda-2)(1-\lambda+2)=0 \Rightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda)=0$$

Οι ιδιοτιμές του είναι: $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=3$.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα βρίσκονται:

Για $\lambda=-1$: $\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\nu_1+2\nu_2=0 \\ 2\nu_1+2\nu_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \nu_2=-\nu_1$

Άρα: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Και για $\lambda=3$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2\nu_1+2\nu_2=0 \\ 2\nu_1-2\nu_2=0 \end{matrix} \Rightarrow \nu_1=\nu_2$

Άρα: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Οπότε η λύση του ομογενούς συστήματος θα είναι:

$$\begin{pmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{pmatrix} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t}+c_2e^{3t} \\ -c_1e^{-t}+c_2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \text{σταθερές}$$

Η λύση του μη ομογενούς θα έχει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} x_\mu(t) \\ y_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t)e^{-t}+c_2(t)e^{3t} \\ -c_1(t)e^{-t}+c_2(t)e^{3t} \end{pmatrix}$$

Οπότε προκύπτει το σύστημα με τις παραγώγους των $c_1(t), c_2(t)$:

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)e^{3t}&=t \\ -c_1'(t)e^{-t}+c_2'(t)e^{3t}&=t \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος δίνει: $c_2'(t)=te^{-3t}$

Άρα: $c_2(t)=-\frac{1}{3}te^{-3t}-\frac{1}{9}e^{-3t}$

Και $2c_1'(t)e^{-t}=0 \Rightarrow c_1'(t)=0 \Rightarrow c_1(t)=0$

Οπότε:

$$\begin{pmatrix} x_\mu(t) \\ y_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Τελικά η γενική λύση του συστήματος θα είναι:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \\ -c_1e^{-t} + c_2e^{3t} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

***Παράδειγμα 6.*** Να λυθεί το ΣΣΔΕ:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2y(t) + t \\ y'(t) &= -2x(t) - 1 \end{aligned}$$

**Λύση** Το σύστημα με μορφή πινάκων είναι:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

Οι ιδιοτιμές του είναι: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα βρίσκονται:

Για $\lambda = 2i$: $\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2i\nu_1 + 2\nu_2 = 0 \\ -2\nu_1 - 2i\nu_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \nu_2 = i\nu_1$

Άρα: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Και για $\lambda = -2i$: $\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2i\nu_1 + 2\nu_2 = 0 \\ -2\nu_1 + 2i\nu_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \nu_2 = -i\nu_1$

Άρα: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Οπότε η λύση του ομογενούς συστήματος θα είναι:

$$\begin{pmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{pmatrix} = c_1e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τον τύπο του Euler : $e^{2it} = cos2t + isin2t$ η λύση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{pmatrix} = c_1(cos2t+isin2t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}+c_2(cos2t-isin2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Acos2t + Bsin2t \\ Bcos2t - Asin2t \end{pmatrix}$$

αν $c_1 + c_2 = A$ και $i(c_1 - c_2) = B$ σταθερές.

Οπότε η μερική λύση θα έχει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} x_\mu(t) \\ y_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)cos2t + B(t)sin2t \\ B(t)cos2t - A(t)sin2t \end{pmatrix}$$

Το προκύπτον σύστημα ως προς $A'(t)$ και $B'(t)$ είναι:

$$\begin{array}{c} A'(t)cos2t + B'(t)sin2t = t \\ B'(t)cos2t - A'(t)sin2t = -1 \end{array}$$

Η λύση του οποίου μας δίνει:

$$\begin{array}{c} A'(t) = tcos2t - sin2t \\ B'(t) = -cos2t + tsin2t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A(t) = \dfrac{t}{2}sin2t + \dfrac{3}{4}cos2t \\ B(t) = -\dfrac{1}{4}sin2t - \dfrac{t}{2}cos2t \end{array}$$

Οπότε:

$$\begin{pmatrix} x_\mu(t) \\ y_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{t}{2}sin2t + \dfrac{3}{4}cos2t\right)cos2t + \left(-\dfrac{1}{4}sin2t - \dfrac{t}{2}cos2t\right)sin2t \\ \left(-\dfrac{1}{4}sin2t - \dfrac{t}{2}cos2t\right)cos2t - \left(\dfrac{t}{2}sin2t + \dfrac{3}{4}cos2t\right)sin2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos^2 2t - \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{t}{2} - sin2tcos2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos^2 2t - \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{t}{2} - \dfrac{sin4t}{2} \end{pmatrix}$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Acos2t + Bsin2t + cos^2 2t - \dfrac{1}{4} \\ Bcos2t - Asin2t - \dfrac{t}{2} - \dfrac{sin4t}{2} \end{pmatrix}$$