Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις V (Λύσεις)

α. $L(\theta)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\exp\{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\theta-i)^2\}$, $\ln L(\theta)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\theta-i)^2$

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta-i)=0 \Rightarrow \Sigma(x_i-i)=n\theta \Rightarrow \hat\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-i)=\bar x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i$

$=\bar x-\frac{n+1}{2}$. $\left(\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\lambda(\underline{x})=\frac{L(\hat\theta)}{L(\hat\theta_0)}$, όπου $\hat\theta_0=0$. Επομένως, $\lambda(\underline{x})=e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\hat\theta-i)^2+\frac{1}{2}\Sigma(x_i-i)^2}$, οπότε

$\ln\lambda(\underline{x})=-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\hat\theta-i)^2+\frac{1}{2}\Sigma(x_i-i)^2=-\frac{1}{2}\left\{\Sigma(x_i-i)^2-2\hat\theta\,\Sigma(x_i-i)+n\hat\theta^2\right\}+$

$\frac{1}{2}\Sigma(x_i-i)^2=\hat\theta\,(n\hat\theta)-n\hat\theta^2/2=n\hat\theta^2/2$. Συνεπώς ο ελπ είναι

$\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underline{x})>c_1\\ \gamma, & =c_1\\ 0, & <c_1\end{cases}$. Τώρα, $\lambda(\underline{x})>c_1 \Leftrightarrow n\hat\theta^2/2>\ln c_1 \Leftrightarrow |\hat\theta|>c$,

δηλαδή η μορφή του ελπ είναι $\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & |\hat\theta|>c\\ \gamma, & =c\\ 0, & <c\end{cases}$.

Θέτουμε $\gamma=0$, λόγω συνεχούς κατανομής και υπολογίζουμε την σταθερά c ώστε $P_{\theta=0}(|\hat\theta|>c)=\alpha$. Όταν $\theta=0$, $X_i\sim N(i,1)$ ή $X_i-i\sim N(0,1)$

$\Sigma(X_i-i)\sim N(0,n)$ ή $\hat\theta\sim N(0,\frac{1}{n})$ ή $\sqrt{n}\,\hat\theta\sim N(0,1)$. Συνεπώς,

$P_{\theta=0}(|\hat\theta|>c)=\alpha \Leftrightarrow P(\sqrt{n}|\hat\theta|>\sqrt{n}c)=\alpha \Leftrightarrow \sqrt{n}c=z_{\alpha/2} \Leftrightarrow c=\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$.

Τελικά, ο ελπ μεγέθους α είναι: $\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & |\hat\theta|>\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\\ 0, & \le\end{cases}$.

$\boxed{2.}$ α. $L(\theta)=\frac{2}{\theta^2}\exp\{-\frac{1}{\theta}(x_1+2x_2)\}$, $\ln L(\theta)=\ln 2-2\ln\theta-\frac{1}{\theta}(x_1+2x_2)$,

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}(x_1+2x_2)=0 \Rightarrow \hat\theta=\frac{x_1+2x_2}{2}$.

β. $\lambda(\underline{x})=\frac{L(\hat\theta)}{L(\hat\theta_0)}$, όπου $\hat\theta_0=\theta_0$. Επομένως, $\lambda(\underline{x})=\left(\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)^2 e^{-\frac{1}{\hat\theta}(x_1+2x_2)+\frac{1}{\theta_0}(x_1+2x_2)}$

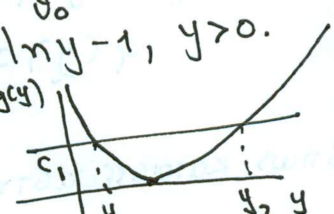
ή $\lambda(\underline{x})=\left(\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)^2 e^{-\frac{1}{\hat\theta}(2\hat\theta)+\frac{1}{\theta_0}(2\hat\theta)}=\left(\frac{\theta_0}{\hat\theta}\right)^2 e^{-2+2\frac{\hat\theta}{\theta_0}}$.

Η μορφή του ελπ είναι $\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underline{x})>c\\ \gamma, & =c\\ 0, & <c\end{cases}$. $\lambda(\underline{x})>c \Leftrightarrow \ln\lambda(\underline{x})>\ln c \Leftrightarrow$

$2\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}-\ln\frac{\hat\theta}{\theta_0}-1\right)>\ln c \Leftrightarrow$

$\frac{\hat\theta}{\theta_0}-\ln\frac{\hat\theta}{\theta_0}-1>c_1 \Leftrightarrow g\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}\right)>c_1$, όπου $g(y)=y-\ln y-1$, $y>0$.

Είναι, $g'(y)=1-\frac{1}{y}=\begin{cases}>0, & y>1\\ =0, & y=1\\ <0, & 0<y<1\end{cases}$ και $\lim_{y\to 0}g(y)=\infty=\lim_{y\to\infty}g(y)$,



και άρα $g\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}\right)>c_1 \Leftrightarrow \frac{\hat\theta}{\theta_0}>y_2$ ή $\frac{\hat\theta}{\theta_0}<y_1$. Θέτουμε $\gamma=0$ και υπολογίζουμε τα

y_1, y_2 ώστε $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}>y_2\right)+P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}<y_1\right)=\alpha$. Υπάρχει απειρία επιλογών y_1, y_2

και μία εξ αυτών είναι $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}>y_2\right)=\alpha/2$ και $P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}<y_1\right)=\alpha/2$.

Όταν $\theta=\theta_0$, $2X_2\sim\mathcal{E}(\theta_0)$ και $X_1\sim\mathcal{E}(\theta_0)$, οπότε $X_1+2X_2\sim G(\alpha=2,\beta=\theta_0)$

και $2(X_1+2X_2)/\theta_0=4\hat\theta/\theta_0\sim G(\alpha=2,\beta=2)\equiv\chi^2_4$. Συνεπώς,

$P_{\theta=\theta_0}\left(\frac{\hat\theta}{\theta_0}>y_2\right)=\alpha/2 \Leftrightarrow P\left(\frac{4\hat\theta}{\theta_0}>4y_2\right)=\alpha/2 \Leftrightarrow y_2=\frac{1}{4}\chi^2_{4,\alpha/2}$. Ανάλογα,

$y_1=\frac{1}{4}\chi^2_{4,1-\alpha/2}$ και ο ελπ μεγέθους α είναι

$\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1, & \hat\theta/\theta_0>\frac{1}{4}\chi^2_{4,\alpha/2} \text{ ή } \hat\theta/\theta_0<\frac{1}{4}\chi^2_{4,1-\alpha/2}\\ 0, & \end{cases}$.