Πραγματική ανάλυση Ι- Λύσεις-6α-6β

1. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο άρτιου βαθμού έχει σύνολο τιμών της μορφής $[c,+\infty)$ ή $[-\infty,c]$ και ότι κάθε τιμή διαφορη του c επαναλαμβάνεται τουλάχιστον δύο φορές..

Λύση

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι θετικός. Στην περίτωση αυτή έχουμε $\lim_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ οπότε αν θεωρήσουμε τον αριθμό $P(0)$ υπάρχουν $a<0$ και $b>0$ τέτοια ώστε $f(x)>f(0)$ για $x<a$ και $f(x)>f(0)$ για $x>b$.

Ο περιορισμός της πολυωνυμικής συνάρτησης P στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ λόγω συνέχειας θα παίρνει ελαχίστη τιμή σε αυτό . Αν $c=f(t)$ η προηγούμενη τιμή θα αποτελεί και ελαχίστη τιμή της αρχικής συνάρτησης. Πράγματι για κάθε $x<a$ ή $x>b$ έχουμε $P(x)>P(0)\geq c$.

Αν Θεωρήσουμε τυχόν σημείο d του διαστήματος $(c,+\infty)$ τότε υπάρχουν $x_1<a$ και $x_2>b$ ώστε $f(x_1)>d>c=f(t)$ και $f(x_2)>d>c=f(t)$, οπότε από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής προκύπτει ότι $d\in P[(x_1,t)]$ και $d\in P[(t,x_2)]$.

Ανάλογα εργαζόμαστε στην περίπτωση που ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι αρνητικός.

2. Να αποδείξτε ότι αν δύο συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα παίρνουν την ίδια μεγίστη τιμή τα διάγράμματά τους τέμνονται (Δώστε ένα πρόχειρο γεωμετρικό σχέδιο).

Λύση

Αν f, g οι συνεχείς συναρτήσεις στό $[a,b]$ και $M=f(x_1)=g(x_2)$ η ενιαία μεγίστη τιμή θεωρώ την συνάρτηση $h=f-g$. Παρατηρούμε ότι $0\leq M-g(x_1)=h(x_1)$ και $0\leq M-f(x_2)=-h(x_2)$ οπότε $h(x_1)h(x_2)\leq 0$ και με βάση το θεώρημα $Bolzano$ υπάρχει t ώστε $h(t)=0$ ή $f(t)=g(t)$, που σημαίνει ότι τα διαγράμματα τέμνονται.

2. Αν f συνάρτηση πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)+f(y)=f(x+y)$ $x,y\in\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι
   1. $f(0)=0$,
   2. Η συνέχεια σε ένα σημείο συνεπάγεται την συνέχεια σε όλο το $\mathbb{R}$.
   3. υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=cx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση Για $x=0$ προκύπτει άμεσα η απάντηση στο πρώτο ερώτημα.

Ο ορισμός της συνέχειας σε ένα σημείο x_0 αν θέσουμε $h=x-x_0$ διαμορφώνεται στην πρόταση,

για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\epsilon)$ ώστε $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\epsilon$ όταν $|h|<\delta$.

Αν στην προηγούμενη έκφραση θέσουμε $f(x_0+h)-f(x_0)=f(h)-f(0)$ αυτή μετατρέπεται στον ορισμό της συνέχειας στο μηδέν. Με άλλα λόγια η συνέχεια σε οποιοδήποτε σημείο ισοδυναμεί με την συνέχεια στο μηδέν.

Σχετικά με το τρίτο ερώτημα. Επειδή $f(0)=0$ έχουμε $0=f(0)=f((x+(-x))=f(x)+f(-x))$ ή $f(x)=-f(-x)$.

Αν n φυσικός αριθμός τότε από την σχέση $nx=x+x+\ldots x$ n-φορές παίρνουμε $f(nx)=nf(x)$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Αν αντικαταστήσουμε το x με το x/n στην προηγούμενη σχέση θα έχουμε $f(x/n)=f(x)/n$.

Αν θεωρήσουμε θετικό κλάσμα m/n από τον συνδυασμό των τριών δύο προηγουμένων σχέσεων έχουμε,

$f(\frac{m}{n}).1=mf(\frac{1}{n}).1)=\frac{m}{n}.f(1)$ και $f(\frac{-m}{n})=\frac{-m}{n}f(1)$ δηλαδή $f(\rho)=\rho f(1)$ για κάθε ρ ρητό αριθμό.

Αν $x\in\mathbb{R}$ γνωρίζούμε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών ρ_n με $\rho_n\longrightarrow x$, οπότε λόγω της συνέχειας της f έχουμε $f(\rho_n)\longrightarrow f(x)$. Επειδή όμως $f(\rho_n)=\rho_n f(1)\longrightarrow xf(1)$ έχουμε ότι $f(x)=f(1)x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.