Πραγματική ανάλυση Ι- Λύσεις-5β

1. 1. Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των ακεραίων αποδείξτε με την χρήση του ορισμού ότι είναι παντού συνεχής.

2. Παρακολουθείστε με προσοχή τους παρακάτω ισχυρισμούς και βρείτε που είναι το λάθος. Θεωρούμε τυχούσα πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Αν θεωρήσούμε τον περιορισμό της σε ένα τυχόν σημείο t σαν σταθερή στο αντίστοιχο μονοσύνολο είναι συνεχής στο t. Με βάση το προηγούμενο η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο t και επομένως όλες ανεξαιρέτως οι πραγματικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.

Λύση

1. Αν k τυχόν ακέραιος και $\delta = 1/2$ τότε προφανώς το μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού για το οποίο ισχύει $x \in (k-\delta, k+\delta)$ ή ισοδύναμα $|x-k| < \delta$ είναι το k, οπότε για $\epsilon > 0$ και $|x-k| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(k)| = 0 < \epsilon \ldots$.

2. Πράγματι η συνάρτηση που προκύπτει από τον περιορισμό της αρχικής συνάρτησης σε ένα συγκεκριμμένο μονοσύνολο ή σε πεπερασμένο σύνολο είναι συνεχής διότι το πεδίο ορισμού της αποτελείται από μεμονομένα σημεία σε αυτό. Κάθε περιορισμός όμως αποτελεί και μια καινούργια συνάρτηση που η αρχική αποτελεί επέκτασή της. Το εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι σε ποιές περιπτώσεις η συνέχεια του περιορισμού συνεπάγεται την συνέχεια της αρχικής. Από μια πιό προσεκτική ματιά στον ορισμό της συνέχειας, προκύπτει ότι αν ο περιορισμός γίνεται στην τομή του πεδίου ορισμού με ανοικτό διάστημα τότε η συνέχεια σε σημείο του περιορισμού συνεπάγεται την συνέχεια της επέκτασης σε αυτό.

2. 1. Θεωρούμε πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο A. Αν για σημείο $x_0 \in A$ υπάρχει διάστημα $(x_0 - q, x_0 + q)$ ώστε να ισχύει η σχέση $|f(x) - f(x_0)| \le M|x - x_0|$ για κάθε $x \in (x_0 - q, x_0 + q) \cap A$, αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

2. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το προηγούμενο συμπέρασμα αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x > 0$ είναι συνεχής στο 4.

Λύση 1. Αντικαθιστώντας την έκφραση $x \in (x_0 - q, x_0 + q) \cap A$ με την $x \in A$ με |....................| < .... έχουμε $|f(x) - f(x_0)| \le M|x - x_0$ για κάθε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < q$. Αν ταυτόχρονα θέσουμε $|x - x_0| <$ .... έχουμε $|f(x) - f(x_0)| \le M|x - x_0| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με |.....................| < q και |.............| < ...., ή ισοδύναμα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x - x_0| < \delta(\epsilon) =$ .... .Η τελευταία έκφραση αποτελεί τον ορισμό της συνέχειας.

2. Από την ταυτότητα $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$f(x) - f(4) = (x^{\frac{1}{2}} - 2)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \frac{(x-4)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots\ldots\ldots + 2}$$

Αν περιοριστούμε σε οποιοδήποτε διαστημα $(4-q, 4+q) \subseteq (0, +\infty)$ έχουμε $|\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots|} \le M$ όπου $M = \frac{4+q+(4+q)^{\frac{1}{2}}+2}{(4-q)^{\frac{1}{2}}+2}$ οπότε στο παραπάνω διάστημα έχουμε |........................| $\le M$|............................|. Από το πρώτο μέρος έχουμε τώρα το ζητούμενο.

3. 1. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και μηδενίζεται στους ρητούς αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ότι μηδενίζεται παντού.

2. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών , τι συμπέρασμα βγάζετε από την υπόθεση ότι $f(t) = t^2$ για κάθε ρητό.

(Θεωρούμε γνωστό ότι κάθε διάστημα περιέχει άπειρους ρητούς και άπειρους αρρήτους)

Λύση

Αν $t \in \mathbb{R}$, από τον ορισμό της συνέχειας στο t έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon)$ τέτοιος ώστε $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ για κάθε $x \in$ (..). Αν θεωρήσουμε τυχόντα x ρητό στο διάστημα (..................................) η προηγούμενη σχέση δίνει $|f(x) - f(t)| =$ |..............| < .... για κάθε .... > 0 που ισοδυναμεί με .... = 0.

2. ....