Θεωρία Πιθανοτήτων II - Ασκήσεις I

#1. Να επαληθευτούν οι τύποι για τη μέση τιμή και διασπορά των παρακάτω κατανομών, χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια $M(t)$ και την $u(t) = \ln M(t)$:

α. Διωνυμική $B(n,p)$, b. Γεωμετρική $Geo(p)$,

γ. Poisson $P(\lambda)$, δ. Γάμμα $G(a,\beta)$.

—— · ——

#2. Αν $X \sim G(a,\beta)$ με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} x^{a-1} e^{-x/\beta}$, $x>0$, $a>0$, $\beta>0$, να βρεθεί η ροπογεννήτρια της τ.μ. $Y = cX$, όπου $c>0$. Επίσης, να δειχθεί ότι $Y \sim G(a, c\beta)$. Ειδικά, αν $X \sim G(n,\beta)$, όπου n φυσικός, να δειχθεί ότι $\frac{2}{\beta} X \sim \chi^2_{2n}$.

—— · ——

#3. Έστω ότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες με $X \sim B(n_1, p)$ και $Y \sim B(n_2, p)$ (Διωνυμική).

α. Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $X+Y$ και να δειχθεί ότι $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$.

β. Να δειχθεί ότι η δεσμευμένη κατανομή της X, δοθέντος ότι $X+Y = z$, όπου $z \in \{0,1,\ldots,n_1+n_2\}$ είναι Υπεργεωμετρική.

—— · ——

#4. Έστω ότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες με $X \sim P(\lambda_1)$ και $Y \sim P(\lambda_2)$ (Poisson).

α. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της $X+Y$ και να δειχθεί ότι $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

β. Να δειχθεί ότι η δεσμευμένη κατανομή της X δοθέντος ότι $X+Y = n$, όπου $n \in \{1,2,\ldots\}$ είναι $B(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

—— · ——

#5. Δίνεται η τ.μ. X με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$.

α. Να δειχθεί ότι $EX = \infty$.

β. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει $t_0 > 0$, τέτοιο ώστε $M(t) < \infty$ $\forall$ $|t| < t_0$. Συγκεκριμένα, να δειχθεί ότι $M(t) = \infty$ $\forall$ $t > 0$ ενώ $M(t) < \infty$ $\forall$ $t \leq 0$.

—— · ——

#6. Αν $X \sim N(0, \sigma^2)$, να δειχθεί ότι $E(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$, $E(X^{2k+1}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.