Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙΙ (Λύσεις)

#3, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

α. $\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases}1, & X_1>0.9\\ 0, & X_1\le 0.9\end{cases}$. Το μέγεθος του $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_0}\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = P_{\theta=1/2}(X_1>0.9) = \int_{0.9}^{1} 2x\,dx = x^2\Big|_{0.9}^{1} = 0.19$. Η ισχύς του $\varphi_1(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_1}\varphi_1(\underset{\sim}{X}) = P_{\theta=1/3}(X_1>0.9) = \int_{0.9}^{1} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{0.9}^{1} = 1-0.9^3 = 1-0.729 = 0.271$.

β. Κατανομή (αντιστρέψιμου) μετασχηματισμού $Y=g(X_1)$ με $g(X_1) = -\ln X_1/\theta$: $f_Y(y) = f_{X_1}(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$. Έχουμε, $y=-\ln x_1/\theta \Rightarrow x_1 = e^{-\theta y} = g^{-1}(y)$ και επομένως $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = e^{-\theta y}(-\theta)$. Αντικαθιστώντας, $f_Y(y) = \frac{1}{\theta}(e^{-\theta y})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\cdot|e^{-\theta y}(-\theta)| = e^{-y}$, $y>0$ (επειδή $0<X_1<1 \Rightarrow \ln X_1<0 \Rightarrow -\ln X_1>0 \underset{\theta>0}{\Rightarrow} -\ln X_1/\theta>0 \Rightarrow Y>0$). Επομένως, $-\ln X_1/\theta \sim \mathcal{E}(1) \equiv G(1,1)$

$\varphi_2(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases}1, & \ln X_1+\ln X_2 > c\\ 0, & \le\end{cases}$. Το μέγεθος του $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta_0}\varphi_2(X) = P_{\theta=1/2}(\ln X_1+\ln X_2 > c) = P_{\theta=1/2}\left(\frac{-\ln X_1-\ln X_2}{\theta} < \frac{-c}{\theta}\right) = P_{\theta=1/2}\left(\frac{-\ln X_1-\ln X_2}{\theta} < -2c\right)$. Η τ.μ. $\frac{-\ln X_1-\ln X_2}{\theta} \equiv U$ είναι άθροισμα δύο ανεξάρτητων και ισονόμων $\mathcal{E}(1)$, άρα ακολουθεί Γάμμα κατανομή, $G(\alpha=2,\beta=1)$, και η τ.μ. $2U \sim G(\alpha=2,\beta=2) \equiv \chi^2_4$.
Τελικά, το μέγεθος του $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι $P(2U<-4c) = P(\chi^2_4<-4c) = F(-4c)$, όπου F η σ.κ. της χ^2_4. Θέλουμε λοιπόν ο φ_1 και ο φ_2 να έχουν το ίδιο μέγεθος, δηλαδή $F(-4c) = 0.19 \iff P(\chi^2_4 > -4c) = 0.81\ (=1-0.19) \iff -4c = \chi^2_{4,0.81}$ (0.81-ποσοστιαίο σημείο της χ^2_4, που υπολογίζεται από πίνακες, δηλ. αριθμητικά και όχι αναλυτικά) $\iff c = -\frac{1}{4}\chi^2_{4,0.81}$

γ. Διαπιστώνουμε ότι έχουμε ΜΕΟΚ και στη συνέχεια ΜΛΠ.
$f(\underset{\sim}{x};\theta) = f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\theta^2}(x_1x_2)^{\frac{1-\theta}{\theta}} = e^{-\ln\theta^2 + \frac{(1-\theta)}{\theta}\cdot(\ln x_1+\ln x_2)}$, $0<x_1<1$, $0<x_2<1$
άρα έχουμε ΜΕΟΚ με $c(\theta) = \frac{1-\theta}{\theta} = \frac{1}{\theta}-1 \downarrow$ και $D(\underset{\sim}{X}) = \ln X_1+\ln X_2$
(επιπλέον $S=\{(x_1,x_2): f(\underset{\sim}{x};\theta)\ge 0\} = (0,1)\times(0,1)$, ανεξάρτητο του θ.)
Επειδή $c(\theta)\downarrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $-D(\underset{\sim}{X})$, άρα η μορφή του Ο.Ι.Ε. (επειδή $H_1: \theta<1/2$) είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases}1, & -D(\underset{\sim}{X})<k\\ \gamma, & =k\\ 0, & >k\end{cases} \iff \varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases}1, & D(\underset{\sim}{X})>-k\\ \gamma, & =-k\\ 0, & <-k\end{cases}$
$\iff \varphi^*(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases}1, & \ln X_1+\ln X_2>c\\ \gamma, & =c\\ 0, & <c\end{cases}$ με $c=-k$. Τώρα, ο $\varphi_2(\underset{\sim}{X})$ είναι της μορφής $\varphi^*(\underset{\sim}{X})$ με $\gamma=0$, άρα είναι Ο.Ι.Ε.

#7, Φυλλάδιο Ασκήσεις ΙΙΙ

Πρόκειται περί ΜΕΟΚ με $c(\theta) = -\theta$, $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Επειδή $c(\theta)\downarrow$, έχουμε ΜΛΠ ως προς $T(\underset{\sim}{X}) = -D(\underset{\sim}{X})$ και επομένως η μορφή του Ο.Ι.Ε. είναι αυτή της εκφώνησης. Για $n=1$, παίρνοντας $\gamma=0$, η σταθερά c ικανοποιεί τη σχέση $P_{\theta=1}(X_1^2<c)=\delta$, οπότε $c=-\ln(1-\delta)$. Το μέγεθος είναι $E_{\theta=1/2}\varphi(\underset{\sim}{X}) = P_{\theta=1/2}(X_1^2<c) = 1-(1-\delta)^{1/2}$. $(\iff P_{\theta=1}(X_1<\sqrt{c})=\delta)$