Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ - Ασκήσεις ΙΙ - Λύσεις

#1. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}$

$H_0:\ \theta=\theta_0=1/2$ κατά $H_1:\ \theta=\theta_1=2/3$ $(\theta_1>\theta_0)$

Η μορφή των Ι.Ε. είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underset{\sim}{x})>k\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =k\\ 0, & <k\end{cases}$, $\lambda(\underset{\sim}{x})=\dfrac{f(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{f(\underset{\sim}{x};\theta_0)}$

$\lambda(\underset{\sim}{x})=\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{\Sigma x_i}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-\Sigma x_i}$. Έχουμε, $\lambda(\underset{\sim}{x})>k \iff \ln\lambda(\underset{\sim}{x})>\ln k \iff$
$\Sigma x_i\left(\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)+(n-\Sigma x_i)\left(\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)>\ln k \iff$

$$\Sigma x_i\Big(\underbrace{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}-\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}_{>0,\ \text{επειδή } \theta_1>\theta_0}\Big)>\ln k-n\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\iff \Sigma x_i>c_1,\quad c_1=\frac{\ln k-n\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}-\ln\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}}.$$

Επομένως, $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \Sigma x_i>c_1\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =c_1\\ 0, & <c_1\end{cases}$. Ο δοθείς έλεγχος $\varphi(\underset{\sim}{x})$ έχει την μορφή $\varphi^*(\underset{\sim}{x})$ με $c_1=c$, $\gamma(\underset{\sim}{x})=\gamma$ (σταθερά) άρα είναι Ι.Ε. Στις περιπτώσεις α) $H_1:\ \theta=4/5$ και γ) $H_1:\ \theta=5/8$ δεν θα αλλάξει γιατί $\theta_1=4/5>\theta_0=1/2$ και $\theta_1=5/8>\theta_0=1/2$. Θα αλλάξει όμως στην περίπτωση β) $H_1:\ \theta=1/3$ επειδή $\theta_1=1/3<\theta_0=1/2$.

Η ισχύς του $\varphi(\underset{\sim}{X})$ στο $\theta=2/3$, επειδή $\Sigma X_i\sim B(n,2/3)$, είναι $\pi(2/3)=E_{\theta=2/3}\varphi(\underset{\sim}{X})=1\cdot P_{\theta=2/3}(\Sigma X_i>c)+\gamma\, P_{\theta=2/3}(\Sigma X_i=c)$, και οι δύο τελευταίες πιθανότητες μπορούν να υπολογιστούν από τις διωνυμικές πιθανότητες $\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

#2. Έχει λυθεί στην τάξη [Σχόλιο για την #1: Μπορεί επίσης να λυθεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$ είναι ΜΕΟΚ με $c(\theta)\uparrow$]

#3. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\prod_{i=1}^{3} f_i(x_i;\theta)=e^{-\theta}\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}\cdot e^{-2\theta}\frac{(2\theta)^{x_2}}{x_2!}\cdot e^{-3\theta}\frac{(3\theta)^{x_3}}{x_3!}=\frac{2^{x_2}\cdot 3^{x_3}}{x_1!\,x_2!\,x_3!}e^{-6\theta}\theta^{x_1+x_2+x_3}$

Η μορφή των Ι.Ε. ελέγχων για το πρόβλημα $H_0:\ \theta=\theta_0=1$ κατά $H_1:\ \theta=\theta_1=2$ $(\theta_1>\theta_0)$ είναι $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\underset{\sim}{x})>k\\ \gamma(\underset{\sim}{x}), & =k\\ 0, & <k\end{cases}$, $\lambda(\underset{\sim}{x})=\dfrac{f(\underset{\sim}{x};\theta_1)}{f(\underset{\sim}{x};\theta_0)}=e^{6(\theta_0-\theta_1)}\cdot\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

Έχουμε $\lambda(\underset{\sim}{x})>k\iff\ln\lambda(\underset{\sim}{x})>\ln k\iff 6(\theta_0-\theta_1)+(x_1+x_2+x_3)\underbrace{\ln\frac{\theta_1}{\theta_0}}_{>0}>\ln k\iff$
$x_1+x_2+x_3>\dfrac{\ln k-6(\theta_0-\theta_1)}{\ln\theta_1-\ln\theta_0}=c_1$. Επομένως, $\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & x_1+x_2+x_3>c_1\\ \gamma(x), & =c_1\\ 0, & <c_1\end{cases}$

Ο δοθείς έλεγχος $\varphi(\underset{\sim}{x})$ είναι της μορφής $\varphi^*(\underset{\sim}{x})$ με $c_1=c$ και $\gamma(\underset{\sim}{x})=\gamma$.

#4. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\Sigma(x_i-1)}=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\Sigma x_i+\frac{n}{2\theta}}$, που είναι ΜΕΟΚ με $c(\theta)=-\frac{1}{2\theta}\uparrow$, $D(\underset{\sim}{x})=\Sigma x_i$, $S=(1,\infty)^n$ ανεξάρτητο του θ. Επομένως, επειδή $\theta_1=1>1/2=\theta_0$, ο έλεγχος $\varphi(\underset{\sim}{x})$ είναι Ι.Ε.

β) Για $n=1$, $\gamma=0$ (λόγω συνεχούς κατανομής), οπότε η ισχύς του $\varphi(\underset{\sim}{X})$ είναι $E_{\theta=1}\varphi(\underset{\sim}{X})=P_{\theta=1}(X_1>c)$. Συνεπώς, $P_{\theta=1}(X_1>c)=\delta\underset{c>1}{\iff}\int_c^\infty\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\delta$
$\iff e^{-\frac{1}{2}(c-1)}=\delta\iff c=1-2\ln\delta$ $(>1$, επειδή $0<\delta<1)$

γ) Το μέγεθος του $\varphi(\underset{\sim}{X})$ είναι $\alpha(\theta_0)=\alpha(1/2)=E_{\theta=1/2}\varphi(\underset{\sim}{X})=P_{\theta=1/2}(X_1>c)=\int_c^{\infty}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}(x-1)}dx$
$=\int_c^{\infty}e^{-(x-1)}dx=e^{-(c-1)}=e^{2\ln\delta}=\delta^2.$

δ) Παραμένει η ίδια μορφή Ι.Ε. για όσα προβλήματα έχουν $H_1: \theta=\theta_1$ με $\theta_1>\theta_0=$ $=1/2$, δηλαδή το (Π1) και το (Π3).

#5. Ο έλεγχος που απορρίπτει την H_0 όταν $\sqrt{X}>c$ είναι $\varphi(\underset{\sim}{X})=\begin{cases}1, & \sqrt{X}>c\\ 0, & \sqrt{X}\le c\end{cases}$.
Ο Ι.Ε. έχει τη μορφή $\varphi^*(X)=\begin{cases}1, & \lambda(X)>k\\ \gamma(X), & =k\\ 0, & <k\end{cases}$, $\lambda(X)=\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)}=$
$=\frac{\theta_0}{\theta_1}e^{(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})\sqrt{x}}$. Έχουμε $\lambda(X)>k \Leftrightarrow$
$\ln(\frac{\theta_0}{\theta_1})+\underbrace{(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1})}_{>0}\sqrt{X}>\ln k \Leftrightarrow \sqrt{X}>\frac{\ln k-\ln(\frac{\theta_0}{\theta_1})}{\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}}=c_1$, δηλαδή

$\varphi^*(X)=\begin{cases}1, & \sqrt{X}>c_1\\ \gamma(X), & =c_1\\ 0, & <c_1\end{cases}$. Ο δοθείς έλεγχος $\varphi(X)$ έχει τη μορφή $\varphi^*(X)$ με $c_1=c$, $\gamma(X)=0$, άρα είναι Ι.Ε.

β) Αρκεί να δειχθεί ότι ο Ι.Ε. μεγέθους e^{-1} έχει ισχύ $e^{-\theta_0/\theta_1}$. Υπολογίζουμε, αρχικά, τη σταθερά c ώστε ο $\varphi(X)$ να έχει μέγεθος e^{-1}, δηλαδή $\alpha(\theta_0)=P_{\theta=\theta_0}(\sqrt{X}>\sqrt{c}\,c)=e^{-1}$
$\Leftrightarrow P_{\theta=\theta_0}(X>c^2)=e^{-1}\Leftrightarrow\int_{c^2}^{\infty}\frac{1}{2\theta_0\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/\theta_0}dx=e^{-1}\overset{\sqrt{x}=y}{\Leftrightarrow}\int_c^{\infty}\frac{1}{\theta_0}e^{-y/\theta_0}dy=e^{-1}\Leftrightarrow$
$e^{-c/\theta_0}=e^{-1}\Leftrightarrow c=\theta_0$. Η ισχύς του $\varphi(X)$ είναι $\pi(\theta_1)=E_{\theta=\theta_1}\varphi(X)=P_{\theta=\theta_1}(\sqrt{X}>c)=$
$=P_{\theta=\theta_1}(X>c^2)=\int_{c^2}^{\infty}\frac{1}{2\theta_1\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/\theta_1}dx=e^{-c/\theta_1}=e^{-\theta_0/\theta_1}.$

#6. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=f_1(x_1;\theta)f_2(x_2;\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\theta^{\alpha_1}}x_1^{\alpha_1-1}e^{-x_1/\theta}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)\theta^{\alpha_2}}x_2^{\alpha_2-1}e^{-x_2/\theta}=\frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}e^{-\frac{1}{\theta}(x_1+x_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\theta^{\alpha_1+\alpha_2}}$
που είναι ΜΕΟΚ με $c(\theta)=-\frac{1}{\theta}\uparrow$, $D(\underset{\sim}{X})=X_1+X_2$ και $S=(0,\infty)^2$ ανεξάρτητο του θ.
Επομένως, από γνωστή πρόταση, και επειδή $\theta_0=1<2=\theta_1$, η μορφή του Ι.Ε. είναι $\varphi(\underset{\sim}{X})=\begin{cases}1, & X_1+X_2>c\\ \gamma, & =c\\ 0, & <c\end{cases}$. Λόγω συνεχούς κατανομής, $\gamma=0$, και για $\alpha_1=\alpha_2=1/2$ η κατανομή της X_1+X_2 είναι $G(\alpha_1+\alpha_2,\theta)$, δηλαδή $G(1,\theta)$ που είναι εκθετική $\mathcal{E}(\theta)$. Επομένως, $P_{\theta=1}(X_1+X_2>c)$
$=0.05\Leftrightarrow\int_c^{\infty}e^{-x}dx=0.05\Leftrightarrow e^{-c}=\ln 0.05\Leftrightarrow c=-\ln 0.05$. Τελικά, ο Ι.Ε. είναι
$\varphi(\underset{\sim}{X})=\begin{cases}1, & x_1+x_2>-\ln 0.05\\ 0, & \le\end{cases}$.

#7. $f(\underset{\sim}{x};\theta)=(1-\theta)\theta^{x_1-1}\cdot(1-\theta^2)\theta^{2(x_2-1)}\cdot(1-\theta^3)\theta^{3(x_3-1)}=(1-\theta)(1-\theta^2)(1-\theta^3)\theta^{x_1+2x_2+3x_3-6}$.
Η μορφή του Ι.Ε. (είτε δουλεύοντας με το λόγο $\lambda(\underset{\sim}{X})$ είτε λόγω ΜΕΟΚ με $C(\theta)=\ln\theta\uparrow$ και $D(\underset{\sim}{X})=X_1+2X_2+3X_3$) είναι $\varphi(\underset{\sim}{X})=\begin{cases}1, & X_1+2X_2+3X_3>c\\ \gamma, & =c\\ 0, & <c\end{cases}$. Τα c, γ ικανοποιούν την εξίσωση

$$P_{\theta=1/4}(X_1+2X_2+3X_3<c)+\gamma P_{\theta=1/4}(X_1+2X_2+3X_3=c)=\alpha$$