Στατιστική Συμπερασματολογία ΙΙ – Ασκήσεις Ι – Λύσεις

#1, #3, #4, #6, #8 έχουν λυθεί στην τάξη.

#2. X = χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα της εταιρείας Α (σε ώρες)

$X \sim \mathcal{E}(\theta)$, $f_1(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x>0$, $\theta>0$, $E(X)=\theta$

ισχυρισμός της εταιρείας Α : $\theta > 6650$

ισχυρισμός της εταιρείας Β : $\theta \leq 6650$

(Π) $H_0: \theta \leq 6650 \ (=\theta_0)$ $\quad H_1: \theta > 6650$

(α). Χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα εμπιστοσύνης με σ.ε. $1-\alpha$, $L(\underset{\sim}{X}) = 2\sum_{i=1}^{n} X_i / \chi^2_{2n,\alpha}$ (από Στατ. Συμπ. Ι) ένας έλεγχος για το (Π) είναι

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \theta_0 < L(\underset{\sim}{X}) \\ 0, & \geq \end{cases} \iff \varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{2n,\alpha} \\ 0, & \leq \end{cases}$$

(ο οποίος, μάλιστα, είναι Ο.Ι.Ε. μεγέθους α – δείξτε το).

Αριθμητική εφαρμογή: $n=10$, $\chi^2_{2n,\alpha} = \chi^2_{20,0.05} \simeq 31.41$, $\frac{\theta_0}{2}\chi^2_{2n,\alpha} \simeq \frac{6650}{2} * 31.41 = 104438.25$, $\sum_{i=1}^{n} X_i = 6252 + \dots + 6852 < 70000$, συνεπώς $\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{2n,\alpha}$ που συνεπάγεται αποδοχή της H_0 σε επίπεδο 5%, δηλ. αποδοχή του ισχυρισμού της εταιρείας Β σε επίπεδο 5%.

(Σχόλιο: ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του θ είναι $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, που είναι συγχρόνως ε.μ.π. και ε.μ.ρ. Στην αριθμητική εφαρμογή, η εκτίμηση του θ είναι $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 6671.7$, λίγο μεγαλύτερη από την τιμή $\theta_0 = 6650$, που κατά τον ισχυρισμό της εταιρείας Α είναι κάτω φράγμα για το θ. Εν τούτοις, η εκτίμηση $\bar{x} = 6671.7$ δεν οδηγεί στην απόρριψη της Ho, είναι δηλαδή μη σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, σύμφωνα με την ορολογία που διατυπώθηκε κατά την μελέτη της p-value. Ως περαιτέρω ερώτημα, βρείτε την p-value του ελέγχου $\varphi(\underset{\sim}{X})$.

(β) Ζητάμε $P_{\theta=6650}(\text{απόρριψη } H_0) = P_{\theta=\theta_0}(\theta_0 < L(\underset{\sim}{X})) = 1 - P_{\theta_0}(\theta_0 \geq L(\underset{\sim}{X})) = 1-(1-\alpha) = \alpha = 0.05$, επειδή εξ ορισμού του κάτω φράγματος με σ.ε. $1-\alpha$ $P_\theta(\theta \geq L(\underset{\sim}{X})) = 1-\alpha$, $\forall \theta$.

#5. X = χρόνος μετάβασης ακολουθώντας την νέα διαδρομή, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ισχυρισμός ότι ο μέσος χρόνος μετάβασης έχει όντως μειωθεί : $\mu < 12$

–||– –||– –||– δεν έχει μειωθεί (αλλά, φυσικά, δεν έχει αυξηθεί) : $\mu = 12$