

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι (2^ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Διδάσκοντες: Καθηγητής Ι. βαν ντερ Βέϊλε, Αν. Καθηγήτρια Χ.Γ. Κοκολογιαννάκη

(Παρακαλώ, όποια/ος επιθυμεί, να επιστρέψει το φυλλάδιο με λυμένες τις ασκήσεις στους διδάσκοντες **έως 09/12/2014** (τελική ημερομηνία))

1) Υποθέτουμε ότι η μούχλα σε ένα αντικείμενο αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο της υπάρχουσας ποσότητας τη χρονική στιγμή t . Αν αρχικά υπάρχουν 500 gr μούχλας και μετά από 6 ώρες έχουν γίνει 600 gr, να καθοριστεί η ποσότητα της μούχλας μετά από μία ημέρα, καθώς και πότε η μούχλα θα φτάσει την ποσότητα των 1000 gr.

2) Ένα ξύλινο αντικείμενο βρέθηκε ότι περιέχει ποσότητα 55% του ραδιενεργού ^{14}C σε σχέση με την ποσότητα που βρίσκουμε στο ζωντανό αυτό ξύλο. Δοθέντος ότι ο χρόνος ημίσειας ζωής του ^{14}C είναι περίπου 5600 χρόνια και ότι ο ρυθμός διάσπασης του είναι ανάλογος της υπάρχουσας ποσότητάς του την χρονική στιγμή t , να βρεθεί η ηλικία του αντικειμένου.

(Α) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των κάτωθι οικογενειών καμπυλών (c σταθερά):

3) $y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + c,$

4) $y^2 - 3x^2 = c$

5) $y^2 = cx^3,$

6) $y = cx^n, n \in \mathbb{N},$

7) $x^2 - cy^2 = 6,$

8) $y^2 = ce^x + x + 1.$

(Β) Να εξετάσετε για ποιά από τα παρακάτω ΠΑΤ ισχύει το θεώρημα του Picard. Για τα ΠΑΤ που ισχύει, να βρείτε τις 3 πρώτες προσεγγίσεις της λύσης.

9) $y' = xy - 2x + x^3, y(0) = 0,$

10) $y' = x + y, y(1) = 1,$

11) $y' = \sqrt{y}, y(0) = 0.$

12) Δίνεται το ΠΑΤ $y' = -2 + 3y - y^2, y(0) = 1.$

(i) Να βρεθεί η 3^η προσέγγιση της λύσης που προβλέπει το θεώρημα του Picard.

(ii) Να βρεθεί η ακριβής λύση αυτού.

(Γ) Να λυθούν οι κάτωθι ΣΔΕ:

13) $(y')^2 = \frac{y}{1+x}$

14) $y^2(1 + (y')^2) = c$

15) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$

16) $x(y')^2 - yy' + a = 0, a \in \mathbb{R}$

17) $y(y')^2 - 2xy' + y = 0$

18) $(y')^2 + (x + 1)y' = y$

19) $x^2(y')^2 + 4xyy' - 5y^2 = 0$

20) $(y')^2 + y' = y.$