

Στατιστική Συμπερασματολογία II - Ασκήσεις 0

1. Δίνεται $X = (X_1, \dots, X_n)$ από α.λ. παρατηρήσεις με κοινή πυκνότητα $f_1(x; \theta) = \frac{3x^2}{\theta^3}$, $0 < x < \theta$ και $f_1(x; \theta) = 0$, $x \notin (0, \theta)$, $\theta > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα $H_0: \theta = 1$ κατά $H_1: \theta = 2$.

α. Έστω $\varphi_1(X)$ ο έλεγχος που απορρίπτει την H_0 όταν $X_{(n)} > \frac{3}{4}$ και την αποδέχεται όταν $X_{(n)} \leq \frac{3}{4}$, όπου $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
 Να υπολογιστούν τα $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$, $\pi(\theta)$ για $\theta = 1$ και $\theta = 2$, αντίστοιχα.

β. Έστω $\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > c \\ 0, & X_{(n)} \leq c \end{cases}$, όπου $c > 0$. Να υπολογιστεί η σταθερά c έτσι ώστε η ισχύς του $\varphi(X)$ να είναι ίση προς 0.90 για $n=3$.

γ. Να υπολογιστεί η σταθερά c έτσι ώστε η πιθανότητα σφάλματος τύπου I να είναι ίση προς α ($0 < \alpha < 1$).

2. Δίνεται $X = (X_1, \dots, X_n)$ από α.λ. παρατηρήσεις με κοινή πυκνότητα $f_1(x; \theta) = \frac{3\theta^3}{x^4}$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$H_0: \theta = \theta_0$ κατά $H_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$, γνωστές τιμές) και τον έλεγχο $\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X_{(1)} > c \\ 0, & X_{(1)} \leq c \end{cases}$, όπου $c > 0$, $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

α. Να υπολογιστεί η σταθερά c έτσι ώστε η ισχύς του $\varphi(X)$ να είναι ίση προς δ ($0 < \delta < 1$).

β. Για αυτήν την τιμή του c , να βρεθεί η πιθανότητα σφάλματος τύπου I.