Πραγματική ανάλυση Ι. Λύση 36

1. α. Αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \le \inf A$. (Σε όλη την άσκηση 1. Τα σύνολα A, B θεωρούνται κάτω φραγμένα)

β. Αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ με $y < x$ τότε $\inf A \ge \inf B$ και στην ειδική περίπτωση $A = B$ αποδείξτε ότι το A είναι απειροσύνολο.

γ. Αποδείξτε ότι $s = \inf A$ εάν και μόνο εάν s κάτω φράγμα του A και $[s, s+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

δ. Έστω $A \subseteq (-\infty, 0)$ και $B \subseteq (0, +\infty)$. Αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \epsilon$, δείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

ε. Αποδείξτε ότι $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

ζ. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

Όλες οι απαντήσεις στηρίζονται στον ορισμό των sup, inf που ισοδυναμεί με τις σχέσεις

ι. $x \le M \forall x \in X \Longleftrightarrow \sup X \le M$ και ιι. $x \ge M \forall x \in X \Longleftrightarrow \inf X \ge M$.

Λύση

α. Επειδή αν $x \in A$ τότε $x \in B$ έχουμε $x \ge \inf B$ για κάθε $x \in A$, που ισοδυναμεί όπως προείπαμε με την σχέση $\inf A \ge \inf B$.

β. Με βάση την υπόθεση για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y < x$ και επειδή $y \ge \inf B$ έχουμε $\inf B \le x$ για κάθε $x \in A$ που ισοδυναμεί με $\inf A \ge \inf B$. Σχετικά με την ειδική περίπτωση $A = B$ αν το A ήταν πεπερασμένο σύνολο θα είχε ελάχιστο στοιχείο x. Σύμφωνα όμως με την υπόθεση θα υπήρχε στοιχείο $y \in A$ με $y < x$, άτοπο

γ. Αν $s = \inf A$ τότε s είναι κάτω φράγμα του A οπότε $A \subseteq [s, +\infty]$. Αν δεν ίσχυε το ζητούμενο συμπέρασμα θα υπήσχε κάποιος $\epsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε $[s, s+\epsilon_0) \cap A = \emptyset$, δηλαδή δεν θα υπήρχε κανένα σημείο του A στο διάστημα $[s, s+\epsilon_0)$ οπότε όλο το A θα ήταν υποσύνολο στο διάστημα $(s+\epsilon_0, +\infty)$. Στην περίπτωση αυτή το $s+\epsilon_0$ θα ήταν κάτω φράγμα του A, άτοπο διότι θα είχαμε κάτω φράγμα γνησίως μεγαλύτερο του $\inf A$. Αντιστρόφως Αν θεωρήσουμε κάτω φράγμα M με τις προυποθέσεις της άσκησης θα δείξουμε ότι είναι το $s = \inf A = M$. Αν δεν ήταν τότε $s > M$ οπότε για $s = M + \epsilon$ έχουμε $x \ge M + \epsilon$ για κάθε $x \in A$ ή $[M, M+\epsilon) \cap A = \emptyset$, άτοπο με βάση την αρχική υπόθεση.

δ.Για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει ότι: $a < b$. Από τη σχέση (i): $\sup A \le b$ για κάθε $b \in B$. Και από την (ii): $\sup A \le \inf B$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\exists a \in A, \exists b \in B : b - a < \epsilon$ και από την σχεση $a \le \sup A \le \inf B \le b$ παίρνουμε $0 \le \inf B - \sup A \le b - a < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$ οπότε $\sup A = \inf B$.

ε. Από τις σχέσεις $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ προκύπτουν οι σχέσεις $\inf A \cup B \le inf A$ και $\inf A \cup B \le \inf B$. Επειδή κάποιο ένα από τα πρώτα μέλη των προηγούμενων ανισοτήτων είναι το ελάχιστο οι δύο ανισότητες συμπτύσονται στην $\min\{\inf A, \inf B\} \ge \inf A \cup B$. Σχετικά με την άλλη πλευρά της ανισότητας , για τυχόν $x \in A \cup B$ θα ισχύει είτε $x \in A$ οπότε $x \ge \inf A \ge \min\{\inf A, \inf B\}$ είτε $x \in B$ οπότε $x \ge \inf B \ge \min\{\inf A, \inf B\}$ και τελικά $\inf(A \cup B) \ge \min\{\inf A, \inf B\}$.

ζ. Για τυχόν $x \in A + B$ έχουμε $x = a + b$ με $a \in A$, $b \in b$ οπότε $x = a + b \ge \inf A + \inf B$ για κάθε $x \in A + B$ που δίνει $\inf(A+B) \ge \inf A + \inf B$. Σχετικά με το άλλο σκέλος της ανισότητας , για τυχόντες αριθμούς $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε $x = a + b \in A + B$ ή $a = x - b \ge \inf(A+B) - b$ για κάθε $a \in A$ που ισοδυναμεί με $\inf A \ge \inf(A+B) - b$. Η τελευταία ανισότητα γράφεται $b \ge \inf(A+B) - \inf A$ για κάθε $b \in B$ που ισοδυναμεί με $\inf B \ge \inf(A+B) - \inf A$ ή $\inf(A+B) \le \inf A + \inf B$ που αποτελεί το δεύτερο σκέλος της ζητούμενης ανισότητας.