

Πραγματική ανάλυση I- Λύσεις-56

1. 1. Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των ακεραίων αποδείξτε με την χρήση του ορισμού ότι είναι παντού συνεχής.
 2. Παρακολουθείστε με προσοχή τους παρακάτω ισχυρισμούς και βρείτε που είναι το λάθος. Θεωρούμε τυχούσα πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό της σε ένα τυχόν σημείο t σαν σταθερή στο αντίστοιχο μονοσύνολο είναι συνεχής στο t . Με βάση το προηγούμενο η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο t και επομένως όλες ανεξαιρέτως οι πραγματικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.
2. 1. Θεωρούμε πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο A . Αν για σημείο $x_0 \in A$ υπάρχει διάστημα $(x_0 - q, x_0 + q)$ ώστε να ισχύει η σχέση $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$ για κάθε $x \in (x_0 - q, x_0 + q) \cap A$, αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 .
 2. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το προηγούμενο συμπέρασμα αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x > 0$ είναι συνεχής στο 4.

Λύση 1. Αντικαθιστώντας την έκφραση $x \in (x_0 - q, x_0 + q) \cap A$ με την $x \in A$ με $|\dots| < \dots$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$ για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < q$. Αν ταυτόχρονα θέσουμε $|x - x_0| < \dots$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|\dots| < q$ και $|\dots| < \dots$, ή ισοδύναμα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta(\epsilon) = \dots$. Η τελευταία έκφραση αποτελεί τον ορισμό της συνέχειας.

2. Από την ταυτότητα $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$f(x) - f(4) = (x^{\frac{1}{2}} - 2)(\dots) = \frac{(x - 4)(\dots)}{\dots + 2}$$

Αν περιοριστούμε σε οποιοδήποτε διάστημα $(4 - q, 4 + q) \subseteq (0, +\infty)$ έχουμε $|\dots| \leq M$ όπου $M = \frac{4 + q + (4 + q)^{\frac{1}{2}} + 2}{(4 - q)^{\frac{1}{2}} + 2}$ οπότε στο παραπάνω διάστημα έχουμε $|\dots| \leq M|\dots|$. Από το πρώτο μέρος έχουμε τώρα το ζητούμενο.

3. 1. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και μηδενίζεται στους ρητούς αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας ότι μηδενίζεται παντού.
 2. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, τι συμπέρασμα βγάξετε από την υπόθεση ότι $f(t) = t^2$ για κάθε ρητό.
 (Θεωρούμε γνωστό ότι κάθε διάστημα περιέχει άπειρους ρητούς και άπειρους αρρήτους)

Λύση

Αν $t \in \mathbb{R}$, από τον ορισμό της συνέχειας στο t έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon)$ τέτοιος ώστε $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\dots)$. Αν θεωρήσουμε τυχόντα x ρητό στο διάστημα (\dots) η προηγούμενη σχέση δίνει $|f(x) - f(t)| = |\dots| < \dots$ για κάθε $\dots > 0$ που ισοδυναμεί με $\dots = 0$.

2.