Αναλλοίωτες Μετρικές Einstein σε Πολλαπλότητες Stiefel και σε Ομάδες Lie

Μαρίνα Σταθά
Υποψήφια Διδάκτωρ

Μια πολλαπλότητα Riemann (M, g) καλείται πολλαπλότητα Einstein εάν ο τανυστής Ricci Ric_g της μετρικής g ικανοποιεί την εξίσωση $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Στους ομογενείς χώρους Riemann $(M = G/H, g)$, όπου G είναι μια ομάδα Lie και H μια κλειστή υποομάδα της, η μετρική g καλείται G-αναλλοίωτη εάν για κάθε $\alpha \in G$ οι αριστερές μεταφορές $\tau_\alpha : G/H \to G/H$, $p \mapsto \alpha p$ είναι ισομετρίες και καθορίζεται από $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτα εσωτερικά γινόμενα στον εφαπτόμενο χώρο $T_o(G/H)$. Τα γινόμενα αυτά εξαρτώνται από την ισοτροπική αναπαράσταση του ομογενούς χώρου, η οποία είναι είτε μη αναγώγιμη (όλες οι G-αναλλοίωτες μετρικές είναι Einstein) είτε αναγώγιμη. Η δεύτερη περίπτωση γίνεται πιο πολύπλοκη εάν οι υποαναπαραστάσεις της, είναι μεταξύ τους ισοδύναμες, διότι η πλήρης περιγραφή αλλά και ο χειρισμός τέτοιων γινομένων είναι αρκετά δύσκολος. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν και οι πραγματικές, μιγαδικές και κβατερνιανές πολλαπλότητες Stiefel $V_k\mathbb{R}^n = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k)$, $V_k\mathbb{C}^n = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-k)$, $V_k\mathbb{H}^n = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-k)$.

Γενικά, μια πολλαπλότητα Stiefel $G/H = V_k\mathbb{K}^n$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ή $\mathbb{H}$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των k-πλαισίων του χώρου $\mathbb{K}^n$. Στην παρούσα διατριβή μελετάμε, για την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{H}$, μετρικές Einstein, οι οποίες ανήκουν σε ένα υποσύνολο των G-αναλλοίωτων μετρικών. Ειδικότερα, η μέθοδος που ακολουθούμε είναι η εξής: Αρχικά θεωρούμε μια κλειστή υποομάδα K της G με την ιδιότητα $H \subset K \subset N_G(H)$. Τότε η πολλαπλότητα Stiefel G/H είναι ο ολικός χώρος της νηματοποίησης $K/H \to G/H \to G/K$. Θεωρούμε τις περιπτώσεις όπου η βάση G/K είναι είτε ένας γενικευμένος χώρος Wallach, είτε μια γενικευμένη πολλαπλότητα σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθεταίους. Σε κάθε περίπτωση οι μετρικές Einstein που βρίσκουμε, καθορίζονται από $\mathrm{Ad}(K)$-αναλλοίωτα εσωτερικά γινόμενα στον εφαπτόμενο χώρο $\mathfrak{m}$ του G/H, ο οποίος γράφεται ως ευθύ άθροισμα των εξής δύο υπόχωρων: του κάθετου $\mathfrak{a} = T_o(K/H)$ και του οριζόντιου $\mathfrak{p} = T_o(G/K)$, δηλαδή $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p}$.

Το δεύτερο αντικείμενο μελέτης της διατριβής, είναι η εύρεση αριστερά αναλλοίωτων μετρικών Einstein, οι οποίες δεν είναι φυσικά αναγωγικές, στις συμπαγείς ομάδες Lie $\mathrm{SO}(n)$ και $\mathrm{Sp}(n)$. Η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε τις ομάδες Lie G ως ομογενείς χώρους μέσω της αμφιδιαφόρισης $G \cong (G \times K)/\Delta(K)$, όπου K μια κλειστή υποομάδα της G και να μελετήσουμε τις αριστερά αναλλοίωτες μετρικές στην ομάδα G, οι οποίες καθορίζονται από $\mathrm{Ad}(K)$-αναλλοίωτα εσωτερικά γινόμενα στον εφαπτόμενο χώρο $\mathfrak{M}$ του ομογενούς χώρου $(G \times K)/\Delta(K)$. Για αυτά τα αναλλοίωτα εσωτερικά γινόμενα αποδεικνύουμε κατάλληλες συνθήκες για τις παραμέτρους τους, ώστε οι αντίστοιχες αριστερά αναλλοίωτες μετρικές στην G να είναι φυσικά αναγωγικές, σύμφωνα με τη θεωρία των J. D' Atri και W. Ziller. Τέλος, εκμεταλλευόμενοι καταλλήλως αυτές τις συνθήκες αποδεικνύουμε την ύπαρξη αριστερά αναλλοίωτων μετρικών Einstein στις ομάδες Lie $G = \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ οι οποίες δεν είναι φυσικά αναγωγικές.

Στα δύο παραπάνω προβλήματα η εξίσωση Einstein ανάγεται σε ένα πολυωνυμικό σύστημα εξισώσεων, το οποίο προκειμένου να το χειριστούμε (ύπαρξη θετικών λύσεων ή εύρεση όλων των λύσεων) χρησιμοποιούμε εκτενώς τη θεωρία βάσεων Gröbner.