Πραγματική ανάλυση I- Άσκηση 4, 2013, Σάμαρης

1. 1. Θεωρούμε πραγματικές συναρτήσεις f, g με g φραγμένη σε περιοχή ενός σημείου t και $\lim_{x\to t} f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to t} f(x)g(x) = 0$

2. Αν a, b πραγματικοι αριθμοί διάφοροι μεταξύ τους, ορίζουμε με d_{ab} την συνάρτηση, $d_{ab}(x) = a$ όταν x ρητός και $d_{ab}(x) = b$ όταν x άρρητος. Αποδείξτε ότι η παραπάνω συνάρτηση δεν έχει όριο και δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

3. Αν f πραγματική συνεχής συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f d_{ab}$ είναι συνεχής σε ένα σημείο t εάν και μόνο εάν $f(t) = 0$.

4. Θεωρουμε πραγματικές συναρτήσεις f, g συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και την συνάρτηση h με $h(x) = f(x)$ όταν x ρητός και $h(x) = g(x)$ όταν x άρρητος. Αποδείξτε ότι η h είναι συνεχής σε ένα σημείο t εάν και μόνο εάν $f(t) = g(t)$. (Υπόδειξη Αποδείξτε πρώτα ότι $h = f + d_{01}(g - f)$.

5. Δώστε παράδειγμα πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών που να έχει μοναδικό σημείο συνέχειας το μηδέν αλλά η απόλυτη τιμή της να είναι παντού συνεχής,

Λύση

1. Καταρχήν από την υπόθεση έχουμε $|g(x)| < M, M > 0$ σε περιοχή $(t-\delta_1, t+\delta_1)$. Από τον ορισμό του ορίου για κάθε $\epsilon/M > 0$ υπάρχει $\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$ ώστε .... για κάθε ....

Αν περιοριστούμε στην περιοχή $(t-\delta, t+\delta)$ με .... που ισχύουν και οι δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε .... $< \epsilon$ για κάθε ....

2. Αν υπήρχε όριο c σε κάποιο t τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon)$ ώστε |....................$-c| <$ .... για κάθε ....) . Αν θεωρήσουμε x_1 ρητό και x_2 άρρητο στην περιοχή $(t-\delta, t+\delta)$ έχουμε $|d_{ab}(x_1) - c| =$ |..............| $<$ .... για κάθε $\epsilon > 0$ που σημαίνει .... = ... Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για άρρητο παίρνουμε ότι ... = ... οπότε .... = ..., άτοπο.

3.Αν $f(t) = 0$ Από την συνέχεια της f στο t και επειδή το πεδίο ορισμού είναι διάστημα έχουμε $\lim_{x\to t} f(x) =$ .... Επειδή d_{ab} φραγμένη από το μέρος 1. έχουμε $\lim_{x\to t} d_{ab}(x)f(x) =$ .... $=$ $(d_{ab}f)$(....).

Αντιστόφως Αν $f(t) \neq 0$ τοτε είναι γνωστό ότι η συνεχής συνάρτηση f θα έχει όλες τις τιμές διάφορες του μηδενός σε κατάλληλη περιοχή του t. Αν η συνάρτηση $d_{ab}f$ ήταν συνεχής στο t και ο περιο ριοσμός .... $= d_{ab}$ στην παραπάνω περιοχή θα ήταν συνεχής σαν πηλίκον συνεχών συναρτήσεων, άτοπο με βάση το ……………………μέρος.

4. Ο Αναγνώστης καλείται να αποδείξει την υπόδειξη.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής έχουμε ότι συνάρτηση h είναι συνεχής σε ένα σημείο t εάν και μόνο εάν $h - f$ είναι συνεχής σε αυτό. Επειδή $h - f =$ ...., από το τρίτο μέρος ο ισχυρισμός της συνέχειας στο t ισοδυαμεί με $= 0$.

5. Θεωρούμε το μέρος 4. για $f(x) =$ ...., $g(x) =$ .... για κάθε $x \in \mathbb{R}$.