# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου 2017-2018

**Θέμα 1 (2 μονάδες)**

(α) Θεωρούμε το σύνολο $A = (0,1) \cup \{-\frac{n}{1+n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Βρείτε τα εσωτερικά σημεία του $A$ και την κλειστή θήκη του $A$.

(β) Έστω $X$ πλήρης μετρικός χώρος, $Y$ μετρικός χώρος, $f \colon X \to Y$ συνεχής απεικόνιση και $(A_n)$ ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του $Y$. Εξηγείστε γιατί ο υπόχωρος

$$Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \colon f(x) \notin A_n\}$$

του $X$ είναι πλήρης.

*Λύση.*

(α) Κάθε $a \in (0,1)$ είναι εσωτερικό σημείο του $A$, καθώς η ανοικτή μπάλα με κέντρο $a$ και ακτίνα $r_a = \min\{a, 1-a\}$ είναι υποσύνολο του $A$. Από την άλλη, κανένα από τα σημεία $-\frac{n}{n+1}$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του $A$: αφού $-\frac{n}{n+1} \leq 0$, κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $-\frac{n}{n+1}$ θα περιέχει αρνητικούς άρρητους, οι οποίοι προφανώς δεν ανήκουν στο $A$. Επομένως, $\mathrm{Int(A)} = (0,1)$.

Προφανώς κάθε σημείο του $[0,1]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Αφού

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1} = -1,$$

έπεται ότι το $-1$ είναι επίσης σημείο συσσώρευσης του $A$. Άλλα σημεία συσσώρευσης δεν υπάρχουν: αν $(b_n)$ είναι ακολουθία σημείων του $A$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$, τότε η $(b_n)$ είτε περιέχει πεπερασμένο πλήθος αρνητικών όρων (άρα αναγκαστικά $b \in [0,1]$) είτε περιέχει υπακολουθία της $-\frac{n}{n+1}$ (άρα αναγκαστικά $b = -1$). Επομένως, το σύνολο $A'$ των σημείων συσσώρευσης του $A$ ισούται με $\{-1\} \cup [0,1]$ και συνεπώς $\mathrm{cl(A)} = \mathrm{A} \cup \mathrm{A}' = \{-1\} \cup [0,1] \cup \{-\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \colon \mathrm{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, έχουμε ότι

$$\{x \in X \colon f(x) \notin A_n\} = \{x \in X \colon f(x) \in Y \setminus A_n\} = f^{-1}(Y \setminus A_n).$$

Αφού το $Y \setminus A_n$ είναι κλειστό στο $Y$ (ως συμπλήρωμα ανοικτού) και η $f$ είναι συνεχής, έπεται ότι το $\{x \in X \colon f(x) \notin A_n\}$ είναι κλειστό στο $X$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Άρα το $Z$ είναι κλειστό στο $X$, ως τομή κλειστών υποσυνόλων του $X$.

**Θέμα 2 (2 μονάδες)**

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση με $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $f$ έχει σταθερό σημείο.

(β) Έστω $X$ συνεκτικός μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{Q}$ είναι σταθερή.

*Λύση.*

(α) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής και την υπόθεση για την $f'$, έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$, για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}$. Επομένως, η $f$ είναι συνάρτηση συστολής. Αφού ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, το θεώρημα Banach συνεπάγεται ότι η $f$ έχει σταθερό σημείο.

(β) Αφού η $f$ είναι συνεχής και ο $X$ είναι συνεκτικός, έπεται οτι το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, επομένως και του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, το $f(X)$ είναι γενικευμένο διάστημα. Αν είχε θετικό μήκος, τότε θα περιείχε άρρητους, άτοπο. Άρα το διάστημα $f(X)$ έχει μηδενικό μήκος, επομένως είναι μονοσύνολο, δηλαδή η $f$ είναι σταθερή.

**Θέμα 3 (2 μονάδες)**
(α) Να εξεταστεί αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x^3}{1 + n\, x^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο. Αν ναι, είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;
(β) Δείξτε ότι οι παρακάτω σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα στο διάστημα $[1, \infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 + 2^n x} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}.$$

*Λύση.*
(α) Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{1 + nx^2} = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η δοσμένη ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση. Έστω $\epsilon > 0$. Αν η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη, θα υπήρχε $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $\left|\frac{x^3}{1+nx^2}\right| < \epsilon$, για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα, θα είχαμε $\frac{|x|^3}{1+Nx^2} < \epsilon$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άτοπο, καθώς

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x|^3}{1 + Nx^2} = \infty.$$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.
(β) Έχουμε $\frac{1}{5+2^n x} \leq \frac{1}{2^n}$, για κάθε $x \geq 1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Αφού η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

συγκλίνει, το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 + 2^n x}$$

στο $[1, \infty)$.
Για το δεύτερο υποερώτημα, θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων με τύπους $a_n(x) = (-1)^n$ και $b_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Τα μερικά αθροίσματα της πρώτης ακολουθίας συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα φραγμένα, αφού ισούνται με $-1$ ή $0$ για κάθε $x \in [1, \infty)$. Επίσης, για τη δεύτερη ακολουθία συναρτήσεων ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = 0, \qquad b_n(x) \geq b_{n+1}(x), \qquad 0 \leq b_n(x) \leq \frac{1}{n},$$

για κάθε $x \in [1, \infty)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, δηλαδή η ακολουθία συναρτήσεων $(b_n(x))$ συγκλίνει μονότονα και ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση στο διάστημα $[1, \infty)$. Επομένως, από το κριτήριο Dirichlet, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1, \infty)$.

**Θέμα 4 (2 μονάδες)**

(α) Να υπολογιστεί το

$$\int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} \right) dx.$$

(β) Δείξτε ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 6^n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-6, 5]$ .

*Λύση.*

(α) Έχουμε $\left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

συγκλίνει, το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$. Επομένως,

$$\int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3} \, dx \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} \right) = 0.$$

(β) Αφού

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)6^{n+1}}}{\frac{1}{n 6^n}} = \frac{1}{6},$$

η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς ισούται με 6.
Για $x = -6$, η δυναμοσειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει ως εναλλάσουσα σειρά από το κριτήριο του Leibniz.

Για $x = 6$, η δυναμοσειρά γίνεται
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
η οποία αποκλίνει.
Επομένως, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-6, 6)$. Από τη θεωρία, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισης, άρα και στο $[-6, 5]$.

**Θέμα 5 (3 μονάδες)**
(α) Για τη συνεχή συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ δίνεται ότι για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > \epsilon$. Δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει ότι $f(x) > \epsilon$.
(β) Να εξεταστεί αν ο αριθμός $\frac{5}{27}$ ανήκει στο σύνολο Cantor.
(γ) Να εξεταστεί αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με σειρά Fourier την
$$1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos(nx).$$

*Λύση.*
(α) Αφού η $f$ είναι συνεχής, η εικόνα του διαστήματος $[0,1]$ θα είναι κλειστό διάστημα πεπερασμένου μήκους (λόγω του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών και του Θεωρήματος Ακροτάτων τιμών). Με άλλα λόγια, υπάρχουν $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f([0,1]) = [a, b]$. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι όλες οι τιμές της $f$ είναι θετικές, άρα $a > 0$. Επομένως το συμπέρασμα έπεται αν θέσουμε $\epsilon = \frac{a}{2}$.
Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συμπάγεια του $[0,1]$ ως εξής: Αφού η $f$ είναι συνεχής, το $f([0,1])$ είναι συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{R}$. Από την υπόθεση, για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $\epsilon_x > 0$ έτσι ώστε $f(x) > \epsilon_x$. Θέτοντας $A_x = (\epsilon_x, \infty)$, έχουμε ότι $f(x) \in A_x$. Επομένως
$$f([0,1]) \subseteq \bigcup_{x \in [0,1]} A_x,$$
δηλαδή τα σύνολα $A_x$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του $f([0,1])$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, έστω το $A_{x_1}, \ldots, A_{x_n}$. Θέτοντας $\epsilon = \min\{\epsilon_{x_1}, \ldots, \epsilon_{x_n}\}$, είναι προφανές ότι $A_{x_k} \subseteq (\epsilon, \infty)$, για κάθε $k \in \{1, \ldots n\}$, άρα
$$f([0,1]) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_{x_k} \subseteq (\epsilon, \infty),$$
δηλαδή $f(x) > \epsilon$, για κάθε $x \in [0,1]$.
(β) Ο αριθμός $\frac{5}{27}$ αναπαρίσταται τριαδικά ως 0.012=0.01122222.... Επομένως, ο αριθμός $\frac{5}{27}$ δεν ανήκει στο σύνολο Cantor, διότι δεν υπάρχει τριαδική του αναπαράσταση η οποία εμφανίζει μόνο τα ψηφία 0 και 2.
Εναλλακτικά, από την κατασκευή του, το σύνολο Cantor είναι η τομή συνόλων $C_n$, καθένα από τα οποία είναι ένωση $2^n$ ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$. Ειδικότερα,
$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Αφού $\frac{1}{9} < \frac{5}{27} < \frac{2}{9}$, έπεται ότι $\frac{5}{27} \notin C_2$, άρα $\frac{5}{27} \notin C$.
(γ) Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση $f$, η ανισότητα Bessel θα έδινε ότι

$$\frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx,$$

δηλαδή ότι

$$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx.$$

Για να είμαστε ακριβείς (παρόλο που δεν το χρειαζόμαστε εδώ), η παραπάνω ανισότητα είναι ισότητα λόγω του Θεωρήματος Parseval. Σε κάθε περίπτωση, καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx < \infty$$

(λόγω συνέχειας της $f$), ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει.