Μαθηματική Ανάλυση

Σημείωμα 1

17 Ιανουαρίου 2018

Συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε ως ορισμό της έννοιας του συμπαγούς υποσυνόλου εκείνον που δίνεται με όρους ανοικτών καλυμμάτων. Το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές αν, δοθείσης μίας οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του X, $\{U_i \mid i \in I\}$, η οποία καλύπτει το K, δηλαδή $K \subseteq \bigcup U_i$, τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από αυτά, U_{i_1}, ..., U_{i_n} που καλύπτει το K, δηλαδή $K \subseteq U_{i_1} \cup \, ... \cup \, U_{i_n}$.

Η παρακάτω απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο

R. Beals, *Analysis, An Introduction*, Cambridge University Press, 2004

Θεώρημα: Τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολά του.

Απόδειξη: Εχουμε δει ξεχωριστά ότι τα συμπαγή υποσύνολα μετρικών χώρων (γενικότερα, τοπολογικών χώρων που έχουν την ιδιότητα του Hausdorff) είναι κλειστά. Επίσης για ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, αν θεωρήσουμε από μία ανοικτή σφαίρα με κέντρο το κάθε σημείο του, παίρνουμε ένα ανοικτό κάλυμμα του υποσυνόλου. Αφού το υπο- σύνολο είναι συμπαγές, πεπερασμένο πλήθος από αυτές τις σφαίρες αρκούν για να το καλύψουν. Αν πάρουμε με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο του υποσυνόλου μία κλειστή σφαίρα με ακτίνα μεγαλύτερη ή ίση από το άθροισμα των ακτίνων των υποσυνόλων αυτών (που είναι πεπερσμένα το πλήθος, άρα το άθροισμα των ακτίνων τους είναι πεπερασμένο), τότε περιλαμβάνει ως υποσύνολο το δοσμένο συμπαγές. Επομένως το δοσμένο συμπαγές φράσσεται από αυτήν την κλειστή σφαίρα.

Δείχνουμε λοιπόν ότι κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγή. Επειδή ένα φραγμένο υποσύνολο περιέχεται ως υποσύνολο μέσα σε ένα κλειστό τετράγωνο (υιοθετούμε ορολογία που παραπέμπει στις δύο διαστάσεις, λέμε ''τετράγωνο'', εκεί που θα έπρεπε ίσως να λέμε ''υπερκύβος n διαστάσεων''), αρκεί να δείξουμε ότι τα κλειστά τετράγωνα είναι συμπαγή. Τότε και το δοσμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, θα είναι συμπαγές. Θα δείξουμε, για την ακρίβεια, ότι αν έχουμε μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα ότι κανένα πεπερασμένο πλήθος από αυτά δεν καλύπτει το κλειστό τετράγωνο K, τότε η οικογένεια αυτή δεν καλύπτει το K. Θα λέμε λοιπόν, για συντομία, ότι ένα υποσύνολο του K διαφεύγει αν δεν υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ανοικτών από τη δοσμένη οικογένεια που να το καλύπτει. Εχουμε πει λοιπόν ότι δεχόμαστε πως το K διαφεύγει. Το χωρίζουμε σε ''τέσσερα'' (2^n στη γενική περίπτωση) κλειστά ''τετράγωνα''. Τουλάχιστον ένα από αυτά υποχρεωτικά διαφεύγει (αλλιώς η ένωση των τεσσάρων πεπερασμένων καλυμμάτων του κάθε μέρους του τετραγώνου θα αποτελεί ένα κάλυμμα του τετραγώνου). Εκείνο το τετράγωνο που διαφεύγει το χωρίζουμε πάλι στα τέσσερα. Πάλι τουλάχιστον ένα από τα μέρη του διαφεύγει. Συνεχίζουμε επαγωγικά και κατά τον τρόπο αυτόν δημιουργείται μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών τετραγώνων, το πλάτος των οποίων τείνει στο 0. Επειδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, γνωρίζουμε ότι ακολουθία αυτή θα τέμνεται σε ένα μονοσύνολο $\{x\}$. Αν το μονοσύνολο αυτό δε διαφεύγει, τότε περιέχεται ως στοιχείο στην ένωση πεπερασμένου πλήθους από ανοικτά σύνολα της αρχικά δοθείσας οικογένειας. Ομως τότε ένα επαρκώς μικρό τετράγωνο της ακολουθίας που έχει τομή αυτό το μονοσύνολο, θα περιέχεται ως υποσύνολο σε αυτήν την πεπερασμένη ένωση ανοικτών. Αυτό είναι άτοπο γιατί όλα τα τετράγωνα της ακολουθίας διαφεύγουν. Αρα το μονοσύνολο διαφεύγει. Αυτό όμως σημαίνει ότι το μονοσύνολο δεν περιέχεται ως υποσύνολο στην ένωση κανενός πεπερασμένου πλήθους από τα ανοικτά στη δοθείσα οικογένεια. Ισοδύναμα, το x δεν είναι στοιχείο κανενός από αυτά τα ανοικτά. Δείξαμε λοιπόν ότι η δοθείσα οικογένεια ανοικτών δεν καλύπτει το κλειστό τετράγωνο K.