Μαθηματική Ανάλυση

Σημείωμα 1

17 Ιανουαρίου 2018

Ομοιόμορφη Σύγκλιση και Παραγώγιση

Η παρακάτω απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο
S. Abbott, *Understanding Analysis*, Springer, 2000

Θεώρημα: Αν η ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f και η ακολουθία των παραγώγων $(f_n')_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f' = g$.

Απόδειξη: Για $c \in [a,b]$ έχουμε, προσθετοαφαιρώντας κατάλληλα, ότι

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c}\right| + \left|\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - f_n'(c)\right| + |f_n'(c) - g(c)|$$

Θεωρούμε δοσμένο ένα $\varepsilon > 0$.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων μας δίνει πως υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_1$ ισχύει (για το οποιοδήποτε επιλεγμένο $c \in [a,b]$) ότι ο τρίτος από τους παραπάνω προσθεταίους γίνεται $< \frac{\varepsilon}{3}$.

Η παραγωγισιμότητα των f_n μας δίνει ότι, για οποιοδήποτε από τα n που προσδιορίζονται παραπάνω, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, όταν $|x - c| < \delta$, ο δεύτερος προσθεταίος να γίνεται $< \frac{\varepsilon}{3}$.

Επιδιώκουμε να αποδείξουμε ότι και ο πρώτος από τους παραπάνω προσθεταίους θα γίνει $\leq \frac{\varepsilon}{3}$, για κατάλληλα n και x. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f_m - f_n$ στο διάστημα $[c, x]$ (θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $c < x$, διαφορετικά το εφαρμόζουμε στο $[x, c]$). Υπάρχει λοιπόν κάποιο $x_0 \in (c, x)$ ώστε

$$f_m'(x_0) - f_n'(x_0) = \frac{f_m(x) - f_n(x) - (f_m(c) - f_n(x)}{x - c}$$

Το (ισχυρό) κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων, δίνει ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για $m,\ n \geq n_2$ ισχύει, (για όλα τα

$x \in [a, b]$ και ειδικότερα) για το x_0 ότι $|f'_m(x_0) - f'_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. (Προσέξτε εδώ ότι ενώ το x_0 δίνεται κάθε φορά αναφορικά με τη συνάρτηση $f_m - f_n$, δηλαδή έχει να κάνει κάθε φορά με τα συγκεκριμένα m, n, η τελευταία ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε τέτοιο x_0, ανεξαρτήτως των m, n μέσω των οποίων προσδιορίζεται.)

Παίρνοντας το όριο της τελευταίας ανισότητας καθώς το m τείνει στο άπειρο βρίσκουμε ότι

$$|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}| = |g(x_0) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ετσι λοιπόν, για $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ και για x τέτοιο ώστε $|x - c| < \delta$, όπως αυτό δίνεται εξ αιτίας της παραγωγισιμότητας της f_n, οποτεδήποτε το $n \geq n_0$ ισχύουν ταυτόχρονα οι ανισότητες για τους τρεις προσθεταίους και άρα προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c).$$