Θεωρία Πιθανοτήτων Ι – Λύσεις Ασκήσεων 33

1. Έστω X το ύψος ενός τυχαία επιλεγμένου ανδρός από αυτόν τον πληθυσμό, τότε $X \sim N(175, 9)$

α. (i) Αρκεί να βρεθεί $P(X > 175) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{175-\mu}{\sigma}\right) \overset{Z \sim N(0,1)}{=} P\left(Z > \frac{175-175}{3}\right) = P(Z > 0) = \frac{1}{2}$. Άρα το 50% του πληθυσμού αναμένεται να έχει ύψος μεγαλύτερο από το μέσο ύψος. [Γενικά ισχύει: αν $Y \sim N(\nu, \tau^2)$, τότε $P(Y > \nu) = 1/2$.]

(ii) $P(X > 178) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{178-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) \simeq 1 - 0.8413 \simeq 0.1587$. Άρα περίπου το 16% του πληθυσμού αναμένεται να έχει ύψος μεγαλύτερο από 178cm.

(iii) $P(169 < X < 181) = P\left(\frac{169-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{181-\mu}{\sigma}\right) = P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 2 * 0.9772 - 1 = 0.9544$. Άρα περίπου το 95.5% του πληθυσμού αναμένεται να έχει ύψος μεγαλύτερο από 169cm αλλά μικρότερο από 181 cm. [Σημείωση: ίδια είναι και η πιθανότητα $P(169 \leq X \leq 181)$, λόγω συνεχούς κατανομής.]

β. Όλες οι πιθανότητες υπολογίζονται μέσω διωνυμικών πιθανοτήτων: Θεωρούμε ως "επιτυχία" (E) = (το ενδεχόμενο) ένας τυχαία επιλεγμένος άνδρας να έχει ύψος άνω των 170 cm. Τότε $p = P(\text{"επιτυχία"}) = P(X > 170) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{170-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{170-175}{3}\right) \simeq P(Z > -1.67) = 1 - P(Z \leq -1.67) = 1 - \Phi(-1.67) = 1 - (1 - \Phi(1.67)) = \Phi(1.67) \simeq 0.9525$.

Ορίζουμε την τ.μ. W = ο αριθμός των ανδρών, μεταξύ των 4 του δείγματος, με ύψος άνω των 170 cm. Τότε $W \sim B(n=4, p)$ (Διωνυμική)

(i) $P(W=4) = p^4$, (ii) $P(W \geq 1) = 1 - P(W=0) = 1 - (1-p)^4$, (iii) $P(W=2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$, (iv) $P(W \geq 2) = P(W=2) + P(W=3) + P(W=4) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$.

2. Έστω X η τ.μ. που παριστάνει την εσωτερική διάμετρο ενός σωλήνα, τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$.

α. Η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα είναι $p = P(X > 10.1) + P(X < 9.9) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{10.1-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{9.9-\mu}{\sigma}\right) \overset{Z \sim N(0,1)}{=} P(Z > 1) + P(Z < -1) = 2P(Z > 1) = 2 \cdot (1 - P(Z \leq 1)) = 2 \cdot (1 - \Phi(1)) \simeq 2 * (1 - 0.8413) = 2 * 0.1587 \simeq 0.32$ (πρακτικά, πολύ μεγάλη). Η ζητούμενη πιθανότητα θα υπολογιστεί μέσω της διωνυμικής κατανομής: Θεωρούμε ως "επιτυχία" (E) = (το ενδεχόμενο) ανακύκλωση(s) ενός σωλήνα και ορίζουμε την τ.μ. W = ο αριθμός των σωλήνων, μεταξύ των 5 του δείγματος, που θα ανακυκλωθούν. Τότε $W \sim B(n=5, p \simeq 0.32)$ και ζητάμε $P(W=3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$.

β. Ζητάμε το σ^2 έτσι ώστε $p=0.06$, όπου $p=P(X>10.1)+P(X<9.9)$ είναι η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα. Όπως στο (α), έχουμε $p=P\left(Z>\frac{10.1-\mu}{\sigma}\right)+P\left(Z<\frac{9.9-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{0.1}{\sigma}\right)+P\left(Z<-\frac{0.1}{\sigma}\right)=2P\left(Z>\frac{0.1}{\sigma}\right)=2\cdot\left(1-P\left(Z\leq\frac{0.1}{\sigma}\right)\right)=2\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right)$. Επομένως $\frac{p}{2}=1-\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)$ ή $\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)=1-\frac{p}{2}$ $\iff$ $\frac{0.1}{\sigma}=\Phi^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)$, οπότε $\sigma^2=\left[0.1/\Phi^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)\right]^2$.

Αριθμητική αντικατάσταση: $\Phi^{-1}\left(1-\frac{p}{2}\right)=\Phi^{-1}(1-0.03)=\Phi^{-1}(0.97)\simeq 1.88$ γιατί $\Phi(1.88)\simeq 0.9699\simeq 0.97$, $\sigma\simeq 0.1/1.88\simeq 0.053\,cm$ και $\sigma^2\simeq 0.0028\simeq 0.003\,cm^2$.

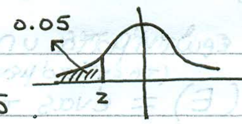
3. Έχει λυθεί στην τάξη.

4. Έστω α η διάρκεια της εγγύησης σε έτη. Ένας κινητήρας θα αντικατασταθεί (δωρεάν), εφ' όσον η διάρκεια ζωής του, X, είναι μικρότερη της εγγύησης α. Συνεπώς η πιθανότητα να αντικατασταθεί ένας κινητήρας δωρεάν είναι $P(X<\alpha)$, η οποία κατά τον κατασκευαστή δεν πρέπει να υπερβεί το 0.05. Έχουμε λοιπόν $P(X<\alpha)\leq 0.05 \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)\leq 0.05$

$Z\sim N(0,1)$ θέτοντας: $\iff P\left(Z<\frac{\alpha-10}{2}\right)\leq 0.05 \iff \Phi\left(\frac{\alpha-10}{2}\right)\leq 0.05 \overset{\Phi\uparrow}{\iff} \frac{\alpha-10}{2}\leq\Phi^{-1}(0.05) \iff \alpha\leq 10+2\Phi^{-1}(0.05)$.

Όμως, $\Phi^{-1}(0.05)=z \iff \Phi(z)=0.05 \iff 1-\Phi(-z)=0.05$

$\Phi(-z)=0.95\simeq\Phi(1.645) \iff -z\simeq 1.645 \iff z\simeq -1.645$.

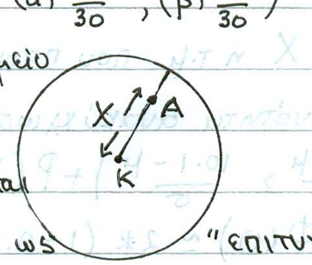


Επομένως, $\alpha\leq 10-2*1.645\simeq 6.7\simeq 7$ έτη, δηλαδή με εγγύηση $\alpha=6$ έτη, η πιθανότητα δωρεάν αντικατάστασης είναι $P(X<6)=\Phi\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{6-10}{2}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)\simeq 1-0.98=0.02$ (δηλ. περίπου 2% των κινητήρων), ενώ με $\alpha=7$ $P(X<7)=\Phi\left(\frac{7-10}{2}\right)=\Phi(-1.5)=1-\Phi(1.5)\simeq 1-0.933\simeq 0.07$. [Προσέξτε επίσης ότι αν δώσει ως εγγύηση το μέσο χρόνο ζωής 10 έτη, τότε $P(X<10)=1/2$, δηλαδή θα αντικαθιστά δωρεάν (περίπου) το 50% των κινητήρων!!!.]

5. Έχει λυθεί στην τάξη.

6. Παρόμοια άσκηση έχει λυθεί στην τάξη. (Απαντήσεις: (α) $\frac{10}{30}$, (β) $\frac{10}{30}$)

7. Έστω ότι η βολή του σκοπευτή βρίσκει τον στόχο στο σημείο A. Τότε η απόσταση του A από το K, έστω X, είναι τ.μ. με $U(0,50)$ κατανομή. Όλες οι ζητούμενες πιθανότητες εξαρτώνται από την πιθανότητα $p=P(X<10)=\frac{10}{50}=0.2$. Θεωρούμε ως "επιτυχία" (E) το ενδεχόμενο $(X<10)$. (α) Ορίζουμε $W=$ ο αριθμός των βολών, μεταξύ των 10, με απόσταση < των 10 cm. Τότε $W\sim B(n=10,p=0.2)$ (διωνυμική) και ζητάμε $P(W\geq 1)=1-P(W=0)=1-(1-p)^{10}=1-0.8^{10}$. (β) Ορίζουμε $V=$ ο αριθμός των βολών μέχρι μία να πέσει σε απόσταση < των 10 cm. Τότε $V\sim Geo(p)$ (γεωμετρική) και ζητάμε $P(V\geq 3)=1-P(V=1)-P(V=2)=1-p-p(1-p)=0.64$. (γ) Ζητάμε $E(V)=\frac{1}{p}=5$ βολές.



9, 10. Έχουν λυθεί στην τάξη. 11. Αφού η X και η −X έχουν την ίδια κατανομή, τότε έχουν και την ίδια μέση τιμή, άρα $E(X)=E(-X)\iff E(X)=-E(X)\iff E(X)=0$. Γενικότερα, αν η X είναι συμμετρική γύρω από το α, τότε $E(X-\alpha)=E[-(X-\alpha)]\iff E(X)=\alpha$.