Μαθηματική Ανάλυση

Ασκήσεις

21 Δεκεμβρίου 2017

Σύγκλιση, υπολογισμοί ορίων, ανώτερων και κατώτερων ορίων ακολουθιών

1. Βρείτε τα liminf, limsup των $x_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$, $y_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$.

2. Αποδείξτε ότι συγκλίνουν οι ακολουθίες $(x_n)_n$ με

(α) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

(β) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n+1}$

3. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+5}{n^2+4n+7}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} \left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})...(1+\frac{n}{n})\right)^{1/n}$$

4. Αν η ακολουθία $(a_n)_n$ είναι αύξουσα, με θετικούς όρους και συγκλίνουσα, ενώ η $(b_n)_n$ είναι τέτοια ώστε $|b_{n+1} - b_n| \leq |a_{n+1} - a_n|$, αποδείξτε ότι και η $(b_n)_n$ συγκλίνει.

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

5. Αποδείξτε ότι, αν οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

6. Υποθέτουμε για την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n\colon (X,d) \to \mathbb{R})_n$ ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε n, κάθε $x \in X$ είναι $f_n(x) \geq \delta$ και ότι η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Αποδείξτε ότι κάθε $x \in X$ είναι $f(x) \neq 0$ και ότι η ακολουθία $(1/f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $1/f$.

7. Υποθέτουμε για την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n\colon (X,d) \to [0,1])_n$ ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και θεωρούμε μία συνεχή συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(g \circ f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g \circ f$.

8. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Βασικές έννοιες μετρικών χώρων και συνεχών συναρτήσεων

9. Αποδείξτε ότι αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε η συνάρτηση $\varrho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ με

$$\varrho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

επίσης ορίζει μία μετρική επί του X.

10. Στο σύνολο των ακολουθιών επί ενός μετρικού χώρου (X,d) (τις οποίες συμβολίζουμε ως $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$) ορίζουμε τη συνάρτηση με τύπο

$$\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n,y_n)}{1+d(x_n,y_n)}.$$

Αποδείξτε ότι ορίζει μετρική επί του συνόλου των ακολουθιών.

11. Στο μετρικό χώρο $X = C([0,1],\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων από το κλειστό διάστημα $[0,1]$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με μετρική

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\},$$

θεωρούμε το σύνολο $\{f \in X \mid \forall x\ |f(x)| \leq 1\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του X κι ότι η συλλογή $\{U_n \mid n \geq 1\}$, με $U_n = \{f \in X \mid f(0) - f(\frac{1}{n}) < 1\}$, αποτελεί ανοικτό του κάλυμμα.

12. Εξετάστε αν συγκλίνει στον χώρο (X,d) της παραπάνω άσκησης η ακολουθία $(f_n)_n$ με $f_n(x) = \frac{1}{n}(x^2+1)$

13. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση προς ένα μετρικό χώρο από ένα σύνολο που καθίσταται μετρικός χώρος με τη διακριτική μετρική, είναι συνεχής.

14. Αποδείξτε ότι η $f\colon X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε $A \subseteq X$, $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$, όπου $f[-]$ δηλώνει την ευθεία εικόνα υποσυνόλου μέσω της συνάρτησης.

Συνδυαστικές ασκήσεις, εφαρμογές σημαντικών θεωρημάτων

15. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_n$ σημείων του μετρικού χώρου (X,d) είναι τέτοια ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$. Αποδείξτε ότι είναι ακολουθία Cauchy.

16. Δίνεται η $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, με $f(x) = \frac{x^4+a}{20}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in [0,a]$ τέτοιο ώστε $f(x) = x$.

17. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f_n\colon [a,b] \to (0,\infty)$ είναι όλες συνεχείς και ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σημειακά σε μία συνεχή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

18. Αν $\{F_n \mid n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και $f\colon \mathbb{R}^n \to (X,d)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$f[\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f[F_n]$$