Μια εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

Στη «Στήλη του Μαθητή», του περιοδικού *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α* της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, ένα κορίτσι είχε γράψει: [1]

«Είναι βέβαιο πως κάθε τι το οποίο δεν είναι δυνατό να παραγοντοποιηθεί σύμφωνα με τις ως τώρα γνώσεις μας, είναι αδύνατο να παραγοντοποιηθεί (...) σ' ένα άλλο σύνολο αριθμών; Το άθροισμα δύο τετραγώνων νομίζω ότι παραγοντοποιείται χρησιμοποιώντας την προσθαφαίρεση του κατάλληλου όρου, δηλ.

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+2\alpha\beta$$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(\alpha+\beta)^2-(\sqrt{2\alpha\beta})^2$$
$$=(\alpha+\beta+\sqrt{2\alpha\beta})(\alpha+\beta-\sqrt{2\alpha\beta}).»$$

Οπως προβλέπει στο γράμμα της η ίδια η μαθήτρια, η παραγοντοποίηση που προτείνει δεν μπορεί πάντα να πραγματοποιηθεί στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Γιατί αν οι α, β είναι ετερόσημοι, το γινόμενό τους $\alpha\beta$ είναι αρνητικό, και στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού.

Χρειαζόμαστε, λοιπόν, ένα νέο σύνολο αριθμών, ευρύτερο απο το $\mathbb{R}$. Καλό θα ήταν οι νέοι αυτοί αριθμοί να έχουν την ίδια αλγεβρική συμπεριφορά με τους πραγματικούς αριθμούς, όσο είναι αυτό δυνατό,και επιπλέον θέλουμε να υπάρχει πάντα σ' αυτό το σύνολο αριθμών η τετραγωνική ρίζα, δηλ. να έχει πάντα λύση η εξίσωση

$$x^2=c.$$

Ας αναλύσουμε κάπως τις απαιτήσεις μας. Ας θέσουμε πρώτα στην παραπάνω εξίσωση όπου c το -1, και ας δεχτούμε οτι υπάρχει ένας "φανταστικός αριθμός " i (μία «φανταστική μονάδα») με την ιδιότητα

$$i^2=-1.$$

Τότε θα πρέπει να υπάρχουν και άλλοι, άπειροι τέτοιοι "φανταστικοί αριθμοί" της μορφής

$$\beta i\ (\beta\in\mathbb{R})$$

καθώς και άπειρα "αθροίσματα" τέτοιων "φανταστικών" με πραγματικούς, που θα έχουν τη γενική μορφή ενός "μιγαδικού αριθμού"

$$\alpha+\beta i\ (\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$

Τους πραγματικούς αριθμούς $a, και\ \beta$ θα τους λέμε τότε αντίστοιχα, *πραγματικό μέρος* και *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού $\alpha+\beta i$. Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό δυο οποιωνδήποτε μιγαδικών αριθμών θα θέλαμε να ισχύουν οι ιδιότητες(ή οι κανόνες)που ισχύουν στους πραγματικούς αριθμούς. Με την απαίτηση να ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό καθώς και η επιμεριστική για τον πολλαπλασιασμό ως προς την πρόσθεση μπορούμε να βρούμε *ποιά οφείλουν να είναι* το άθροισμα και το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$. Πραγματικά,οφείλουμε να έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta i+\delta i)=$$

$$=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

[1] Ιουλιανή Βρούτση, από το Ράλλειο Γυμνάσιο Πειραιά, σε γράμμα της για τη Στήλη του Μαθητή, δημοσιευμένο στον ΕΥΚΛΕΙΔΗ Α', τεύχος 4 της χρονιάς 1984-85.

και

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta i\cdot\delta i=$$
$$\alpha\gamma+(\beta\gamma+\alpha\delta)i+\beta\delta i^2$$

Απαιτώντας ακόμα, όπως είπαμε πιο πάνω, να είναι $i^2=-1$, καταλήγουμε στα εξαγόμενα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i \tag{1}$$

και

$$(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i \tag{2}$$

Αν δεχτούμε ότι ισχύουν οι ισότητες (1)και (2) ώς "κανόνες" ή και ως ορισμοί των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, τότε μπορούμε εύκολα και τυπικά (φορμαλιστικά) να αποδείξουμε ότι για τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους μιγαδικούς ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ξέρουμε ότι ισχύουν στους πραγματικούς αριθμούς: η προσεταιριστική η αντιμεταθετική η ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου για κάθε μία πράξη, η επιμεριστικη ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Μπορούμε ακόμα να αποδείξουμε την ύπαρξη αντιθέτων και αντιστρόφων στοιχείων,δείχνοντας έτσι ότι οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν *σώμα*.

Πραγματικά τα ουδέτερα στοιχεία για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό θα είναι,αντίστοιχα, οι μιγαδικοί αριθμοί

$$0+0i$$

και

$$1+0i$$

Αντίθετος του $\alpha+\beta i$ θα είναι(οπως μπορεί να αποδειχθεί εύκολα) ο $(-\alpha)+(-\beta i)$. Ας βρούμε, ακόμα, τον αντίστροφο ενός μιγαδικού $(\alpha+\beta i)\neq 0+0i$. Ο αντίστροφός του, αν υπάρχει, θα είναι ένας μιγαδικός αριθμός $x+yi$ τέτοιος ώστε

$$(\alpha+\beta i)\cdot(x+yi)=1+0i$$

Η ισότητα αυτή, χάρη στην (2), γράφεται

$$(\alpha x-\beta y)+(\beta x+\alpha y)i=1+0i$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη στην παραπάνω ισότητα, καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους:

$$\begin{cases}\alpha x-\beta y &=1\\ \beta x+\alpha y &=0\end{cases}$$

όπου η ορίζουσα των συντελεστών είναι ίση με

$$\alpha^2+\beta^2\neq 0$$

διότι $(\alpha+\beta i)\neq 0+0i$. Επομένως το σύστημα θα έχει μία και μοναδική λύση, την:

$$x=\frac{a^2}{a^2+\beta^2}\qquad y=\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

δηλαδή ο αντίστροφος του $\alpha+\beta i$ θα είναι ο

$$\frac{1}{\alpha+\beta i}=\frac{a^2}{a^2+\beta^2}+\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}i$$

Όλα αυτά είναι πολύ ωραία, αλλά μπορεί κανείς να αναρωτηθεί: *Πώς ξέρουμε ότι ένα τέτοιο σύνολο όπως οι "μιγαδικοί αριθμοί", με τις πράξεις που υποθέσαμε ότι ορίζονται όπως παραπάνω με τις ισότητες (1) και (2), υπάρχει* *στα Μαθηματικά;* Γιατί, για να υπάρχει στα Μαθηματικά ένα σύνολο οντοτήτων, θα πρέπει αυτές οι οντότητες να *ορίζονται σαφώς* και να *εξηγούνται* σε σχέση με τις προϋπάρχουσες οντότητες και μόνο με αυτές. Ετσι, λ.χ δεν είναι καθόλου σαφές, στην προκειμένη περιπτωση, τι σημαίνει το σύμβολο "$+$" στην παράσταση "$\alpha+\beta i$". Πώς μπορούμε να "προσθέσουμε" έναν πραγματικό με έναν "φανταστικό" αριθμό, αφού δεν ξέρουμε τι σημαίνει ο "φανταστικός αριθμός" βi και ούτε ακόμα και το ίδιο το "i";

Μία λύση του προβλήματος είναι να βρεί κανείς ένα *ερμηνευτικό μοντέλο*[2], που να αναπαριστάνει τους μιγαδικούς αριθμούς μέσα στα προϋπάρχοντα Μαθηματικά, και στο μοντέλο αυτό να αναπαραστήσει και τις πράξεις μεταξύ των "μιγαδικών", με συμπεριφορά ανάλογη με αυτή των ισοτήτων (1) και (2). Είναι σχετικά εύκολο να βρούμε μια τέτοια αναπαράσταση για την *πρόσθεση* που να υπακούει στον κανόνα (1), αν φανταστούμε τους "μιγαδικούς αριθμούς"ως διανύσματα στο επίπεδο, με κοινή αρχή την αρχή την αρχή του συστήματος συντεταγμένων: η πρώτη συντεταγμένη, α ,ενός τέτοιου διανύσματος (α,β) θα παριστάνει το "πραγματικό" μέρος και η δεύτερη β, το "φανταστικό" μέρος του "μιγαδικού" $\alpha+\beta i$. Και αν μας δοθούν δύο "μιγαδικοί" $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$, το άθροισμά τους

$$(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

θα αναπαρίσταται με το διάνυσμα με συντεταγμένες

$$(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$$

που ανήκει, όπως και τα (α,β) και (γ,δ), στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$. Αναπαριστώντας μάλιστα και την "φανταστική μονάδα" i με το διάνυσμα $(0,1)$, θα δώσουμε, επί τέλους, ένα νόημα στο "μιγαδικό αριθμό" $\alpha+\beta i$: αυτός θα αναπαρίσταται απο το διανυσματικό άθροισμα

$$(\alpha,0)+(0,\beta)=\alpha(1,0)+\beta(0,1)$$

όπως φαίνεται στο Σχ.1α (στο Σχ.1β φαίνεται και η αναπαράσταση του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$. Στο Σχ.1α βλέπουμε ακόμα ότι το μήκος του διανύσματος (α,β) είναι (από το Πυθαγόρειο θεώρημα), ίσο με $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Αυτό το μήκος, που φυσικά είναι πάντα ≥ 0, είναι λογικό να το ονομάσουμε "*μέτρο του μιγαδικού αριθμού*" $\alpha+\beta i$ και να το συμβολίσουμε με

$$\mid\alpha+\beta i\mid=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Στο Σχ.1β μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι, για το μέτρο των "μιγαδικών" αριθμών ισχύει η γνωστή μας ιδιότητα της απόλυτης τιμής πραγματικών αριθμών

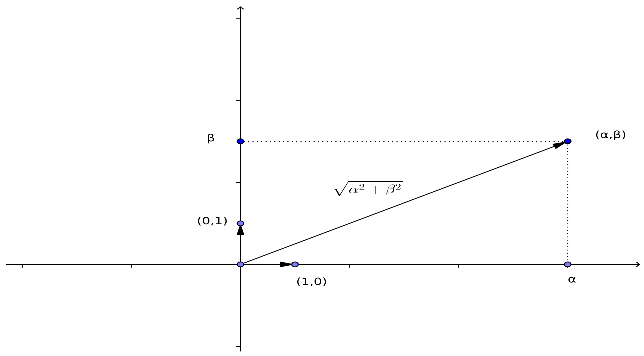
$$\mid(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)\mid\leq\mid\alpha+\beta i\mid+\mid\gamma+\delta i\mid$$

που εκφράζει, απλώς, ότι το μήκος της διαγωνίου του παραλληλογράμμου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο απο το άθροισμα των μηκών των δύο μη παράλληλων πλευρών του. Δίκαια,λοιπόν, η ιδιότητα αυτή έχει ονομαστεί «τριγωνική ανισότητα», γιατί γίνεται φανερή στο επίπεδο μέσω ενός παραλληλογράμμου ή ενός τριγώνου (ενώ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών κάτι τέτοιο δεν φαίνεται καθόλου).

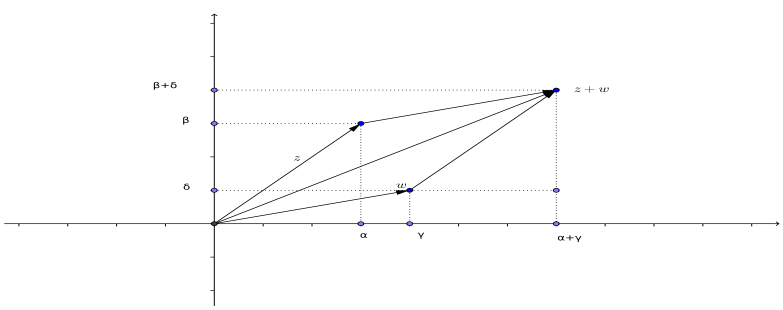
Το δύσκολο βήμα ήταν να αναπαρασταθεί γεωμετρικά (και με βάση αυτή την αναπαράσταση να οριστεί με σαφή τρόπο) το *γινόμενο* δύο μιγαδικών αριθμών. Το βήμα αυτό το έκανε πρώτος ένας "άσημος" γεωδαίτης από την Νορβηγία, ο Caspar Wessel. Πρίν τελειώσει ο $18^{ος}$αιώνας ο Wessel δημοσίευσε μια εργασία στη Δανία με τίτλο "Επί της Αναλυτικής Αναπαράστασης της Διεύθυνσης"όπου έγραφε τα εξής[3]:

[2] T.Patronis & D.Spanos,"Exemplarity in Mathematics Education:from a Romanticist Viewpoint to a Modern Hermeneutical One". *Science & Education,*Vol.15,No1,2013.

[3] Caspar Wessel(1799),στο:H.Midonich(ed) *The Treasury of Mathematics,*Penguin Books,1965,σελ.326.



σχημα 1α



σχημα1β

Figure 1: Στο Σχήμα 1.α αναπαρίσταται ένας μιγαδικός αριθμός και το μέτρο του. Στο Σχήμα 1.β αναπαρίσταται το άθροισμα δύο μιγαδικών.

Θα είναι δυνατό, σε κάθε περίπτωση, να σχηματίσουμε το γινόμενο δύο ευθειών γραμμών [σήμερα θα λέγαμε:"προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων] *από έναν από τους παράγοντες του, κατά τον ίδιο τρόπο που ο άλλος παράγοντας σχηματίζεται απο την θετική γραμμή* [*"θετικά προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα"*] *που έχουμε λάβει ως ίση με τη μονάδα. Δηλαδή: πρώτα οι δύο παράγοντες θα έχουν τέτοια διεύθυνση ώστε και οι δύο να τοποθετούνται στο ίδιο επίπεδο με την θετική μονάδα.*
Δεύτερο, όσο αφορά το μήκος, το γινόμενο θα είναι [θα έχει λόγο] προς *τον έναν παράγοντα όπως ο άλλος παράγοντας είναι* [έχει λόγο προς] *τη μονάδα. Και τέλος, αν πάρουμε τη θετική μονάδα, τους δύο παράγοντες και το γινόμενό τους με κοινή αρχή, το γινόμενο θα έχει διεύθυνση, στο ίδιο επίπεδο με τους παράγοντες και την μονάδα, τέτοια που να αποκλίνει από τον ένα παράγοντα τόσες μοίρες, όσες αποκλίνει ο άλλος παράγοντας από τη μονάδα* [επομένως με συνολική απόκλιση από τη μονάδα το άθροισμα των δύο αποκλίσεων].

Στο Σχ.2α,β απεικονίζονται όσα λέει παραπάνω ο Wessel . Οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i$ και $w = \gamma + \delta i$ αναπαρίστανται ως τα διανύσματα $(\alpha.\beta)$ και (γ, δ), με συντεταγμένες,αντίστοιχα, τους πραγματικούς αριθμούς

$$\alpha = r \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \beta = s \cdot \eta\mu\omega$$

όπου

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad s = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Τα μέτρα r και s, μαζί με τις γωνίες (τα *"ορίσματα"* όπως συνηθίζεται να λέγονται) ω και φ αντίστοιχα, *χαρακτηρίζουν* τους z και w .Έτσι θα μπορούσαμε να γράψουμε, σε μορφή "πολικών συντεταγμένων",

$$z = (r, \varphi) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad w = (s, \omega)$$

όπου, για να είναι μοναδική η αναπαράσταση , δεχόμαστε οτι οι γωνίες φ και ω βρίσκονται στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και διαγράφονται κατά την θετική φορά.Το γινόμενο $z \cdot w$ ορίζεται σύμφωνα με όσα λέει ο Wessel στο πιο πάνω απόσπασμα, ως ο μιγαδικός που έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων των z και w δηλαδή τον θετικό πραγματικό αριθμό

$$| z \cdot w |=| z | \cdot | w |= s \cdot r$$

και όρισμα το «άθροισμα των γωνιών φ και ω $modulo\, 2\pi$ »[4],δηλαδή το μοναδικό τόξο του διαστήματος $[0, 2\pi)$ που το τελικό άκρο του συμπίπτει, πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, με το τελικό άκρο του τόξου $\varphi + \omega$.

Είναι όμως, το γινόμενο $z \cdot w$ που ορίζεται όπως παραπάνω, το ίδιο με το γινόμενο που προβλεπόταν απο την αρχή του μαθήματος; Με άλλα λόγια ο μιγαδικός με πολικές συντεταγμένες

$$(r \cdot s, \varphi + \omega)$$

όπου το άθροισμα $\varphi + \omega$ συμπίπτει με τον μιγαδικό

$$(\alpha\gamma - \beta\delta,\ \beta\gamma + \alpha\delta)$$

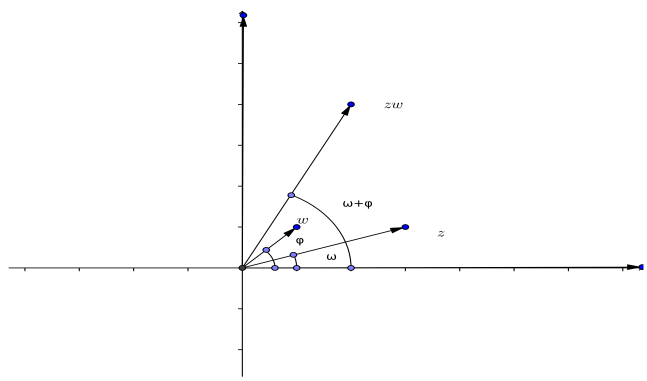
σε καρτεσιανές συντεταγμένες; Αντικαθιστώντας τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $r \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi, r \cdot \eta\mu\varphi,\ s \cdot \sigma\upsilon\nu\omega, s \cdot \eta\mu\omega$ αντίστοιχα έχουμε

$$\alpha\gamma - \beta\delta = rs \cdot \sigma\upsilon\nu(\varphi + \omega)$$

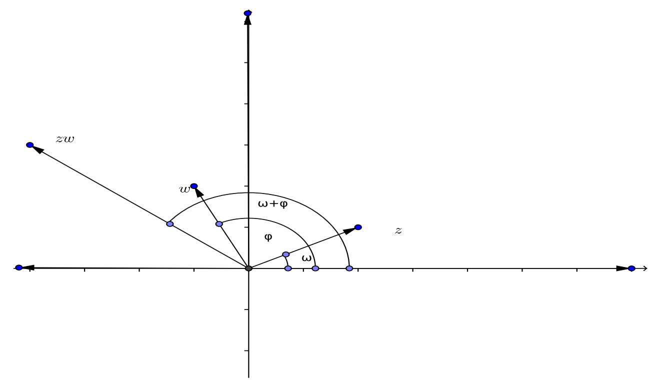
και

$$\beta\gamma + \alpha\delta = rs \cdot \eta\mu(\varphi + \omega)$$

[4]Η έκφραση αυτή,κατά αναλογία με την Αριθμητική $modulo\, m$,χρησιμεύει για την περίπτωση που το άθροισμα $\varphi + \omega$ ξεπερνάει το 2π



Σχημα 2α



Σχημα 2β

Figure 2: Στα Σχήματα 2.α , 2.β βλέπουμε δύο περιπτώσεις για το γινόμενο μιγαδικών

Επομένως το μέτρο του $(\alpha\gamma - \beta\delta,\, \beta\gamma + \alpha\delta)$ είναι $r \cdot s$ και το όρισμά του είναι $\varphi + \omega(mod 2\pi)$, όπως πραγματικά θα θέλαμε να ειναι!

Βλέποντας, τώρα πλέον τους μιγαδικούς αριθμούς με τα μάτια ενός μαθηματικού του καιρού μας,μπορούμε να τους δώσουμε ένα καινούργιο νόημα, ορίζοντάς τους ως *ένα σώμα* $\mathbb{C}$=$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,με πράξεις τις $(+)$,$(\cdot)$ όπως τις ορίσαμε πιο πάνω για ζεύγη πραγματικών αριθμών. Είναι σημαντικό, όμως, να παρατηρήσουμε εδώ *ότι η δομή των πραγματικών αριθμών, με την συνηθισμένη πρόσθεση και το συνηθισμένο πολλαπλασιασμό, αντιστοιχίζεται ισόμορφα μέσα στην δομή* $\mathbb{C}$. Αυτό γίνεται με την βοήθεια της προφανούς αντιστοιχίας ένα-ένα

$$x \to (x, 0)$$

Γιατί είναι φανερό ότι

$$x_1 + x_2 \to (x_1, 0) + (x_2, 0)$$

και

$$x_1 \cdot x_2 \to (x_1, 0) \cdot (x_2, 0)$$

Χάρη σ'αυτή την παρατήρηση,μπορούμε (κάνοντας μια μικρή "κατάχρηση"στο συμβολισμό) να ταυτίζουμε το ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με τον μιγαδικό αριθμό $x + yi$ (όπως τον προτοεμφανίσαμε),επειδή είναι

$$(x, 0) + (y, 0)\, i = (x, 0) + (y, 0)\, (0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)\, .$$

Επανερχόμενοι στο πρόβλημα της *παραγοντοποίησης*, από το οποίο ξεκινήσαμε με το γράμμα της μαθήτριας, παρατηρούμε ότι στο σύνολο των πολυωνύμων μιας μεταβλητής,με συντελεστές πραγματικούς ή μιγαδικούς, η ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων με μικρότερο βαθμό εξαρτάται απο το σύνολο των αριθμών στο οποίο αναφερόμαστε.Αν εννοούμε την ανάλυση στο σύνολο(ή καλύτερα στο σώμα) $\mathbb{C}$ των μιγαδικών, τότε, σύμφωνα με το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας* (που η απόδειξή του ξεφεύγει απο το πλαίσιο τούτου του βιβλίου) *κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε πλήθος*

παραγόντων τόσων όσο είναι ο βαθμός του.
Για παράδειγμα,το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 1$ αναλύεται ως εξής στο σώμα $\mathbb{C}$:

$$P(x) = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}) = \left[(x-1)\left(x^2+2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\right] =$$

$$(x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] =$$

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ασκήσεις

1. Να αναλύσετε το πολυώνυμο
$$Q(x) = x^4 - 1,$$
σε γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων, πρώτα στο σώμα των πραγματικών αριθμών και ύστερα στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Να απεικονίσετε τις ρίζες του $Q(x)$ σε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα την μονάδα.

2. Να βρείτε μια ένα προς ένα αντιστοιχία, ανάμεσα στο σύνολο των μιγαδικών ριζών του πολυωνύμου
$$P(x) = x^p - 1$$
όπου p πρώτος ≥ 3, και στο σύνολο των κλάσεων ισοϋπολοίπων ακεραίων $modulo\, p$, έτσι ώστε στο γινόμενο των μιγαδικών να αντιστοιχεί το άθροισμα των κλάσεων ισοϋπολοίπων. Σε ποιές κλάσεις $modulo\, p$ αντιστοιχούν οι "φανταστικές ρίζες" του $Q(x)$;