

ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις 7

1. Θυμίζουμε το θεώρημα $\text{vol}_n(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\det(A^t A)}$, όπου A $N \times n$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^N$.

i) Δείξτε ότι το εμβαδό του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $a, b \in \mathbb{R}^N$ ισούται με $\|a\| \cdot \|b\| \sin \phi$, όπου ϕ η γωνία μεταξύ των a, b ($0 < \phi < \pi$).

ii) Δείξτε ότι για $N = 3$ ισχύει $\|a\| \cdot \|b\| \sin \phi = \|a \times b\|$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε την ορίζουσα $\det(a, b, a \times b)$).

2. Έστω $u_1, u_2, \dots, u_k$ και $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ διανύσματα του $\mathbb{R}^N$ που ικανοποιούν $\langle u_i, v_j \rangle = 0$, για $i = 1, 2, \dots, k$ και $j = 1, 2, \dots, \ell$. Δείξτε ότι

$$\text{vol}_{k+\ell}(u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_\ell) = \text{vol}_k(u_1, \dots, u_k) \text{vol}_\ell(v_1, \dots, v_\ell).$$