

ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις 5

1. Έστω $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Αποδείξτε ότι η ψ είναι 1-1. Δείξτε ότι η εικόνα $\psi(\mathbb{R})$ δεν είναι πολλαπλότητα στα σημεία που αποτελούν λύση της $\psi'(t) = 0$.

2. Έστω $a \in (0, 1)$ σταθερά. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) = (t - a \sin t, 1 - a \cos t)$ είναι εμφύτευση. (Υπόδειξη: Ίσως δείξτε πρώτα ότι η $t - a \sin t$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t). Σχεδιάστε εικόνα της ψ .

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$ είναι εμφύτευση. Συμπεράνετε ότι η εικόνα $M = \psi(\mathbb{R})$ είναι πολλαπλότητα διάστασης 1. Σχεδιάστε την καμπύλη M . Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της M στο σημείο $(1, 0)$ και την καρτεσιανή εξίσωση της M .

4. Έστω $I = (-1, \infty)$ και $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(t) = (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$, όπου $a \neq 0$. Δείξτε ότι η ψ είναι 1-1 και ότι $\psi'(t) \neq (0, 0)$ για κάθε $t \in I$. Είναι η ψ εμφύτευση; Είναι η εικόνα $\psi(I)$ πολλαπλότητα;

5. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\psi(t) = \begin{cases} (-f(t), f(t)), & t \leq 0 \\ (f(t), f(t)), & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως $f(0) = 0$, $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η ψ είναι λεία, 1-1 και ότι η αντίστροφη $\psi^{-1} : \psi(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Σχεδιάστε την εικόνα $\psi(\mathbb{R})$. Είναι η $\psi(\mathbb{R})$ πολλαπλότητα;

6. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\psi(t_1, t_2) = (t_1^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2, t_2^3)$.

i) Δείξτε ότι η ψ είναι 1-1.

ii) Δείξτε ότι το διαφορικό $D\psi(t)$ είναι 1-1, για κάθε $t = (t_1, t_2) \neq (0, 0)$.

iii) Έστω $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Δείξτε ότι η $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ είναι εμφύτευση και συμπεράνετε ότι η εικόνα $\psi(U)$ είναι πολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2.

iv) Βρείτε μια βάση του εφαπτόμενου επιπέδου της εικόνας $\psi(U)$ στο σημείο $\psi(1, 1)$.

7. i) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ λεία απεικόνιση. Η εφαπτόμενη απεικόνιση της ψ είναι η απεικόνιση $T\psi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, $T\psi(t, u) = (\psi(t), D\psi(t)u)$, $t \in U$, $u \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη απεικόνιση μιας εμφύτευσης είναι εμφύτευση.

ii) Έστω M πολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^N$ διάστασης n . Η εφαπτόμενη δέσμη της M είναι το υποσύνολο TM του $\mathbb{R}^{2N}$, $TM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2N} : x \in M, v \in T_x M\}$. Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενη δέσμη της M είναι πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

8. Έστω $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0\}$.

- i) Αποδείξτε ότι το σύνολο $M \setminus \{(0, 0)\}$ είναι πολλαπλότητα διάστασης 1.
 - ii) Βρείτε τα σημεία όπου η M έχει οριζόντιες και κάθετες εφαπτόμενες ευθείες.
 - iii) Σχεδιάστε το σύνολο M . (Αρχίστε βρίσκοντας τα σημεία τομής του M με ευθείες της μορφής $y = ax$).
 - iv) Είναι το σύνολο M πολλαπλότητα στο σημείο $(0, 0)$;
- 9.** Έστω V ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων.
- i) Η γενική γραμμική ομάδα είναι το υποσύνολο του V

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in V : \det A \neq 0\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ είναι πολλαπλότητα. Ποιά η διάστασή της;

- ii) Ορίζουμε $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(A) = \det A$. Δείξτε ότι το διαφορικό της ϕ δίνεται ως

$$D\phi(A)B = \sum_{i=1}^n \det(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι τα διανύσματα-στήλες των A και B αντίστοιχα.

- iii) Η ειδική ορθογώνια ομάδα είναι το υποσύνολο του V

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in V : \det A = 1\}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητα. Ποιά η διάστασή της;

- iv) Αν I είναι ο ταυτοτικός πίνακας, δείξτε ότι $D\phi(I)B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \mathrm{tr} B$. Συμπεράνετε ότι ο εφαπτόμενος χώρος $T_I \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ ισούται με το σύνολο όλων των πινάκων με ίχνος μηδέν.

10. i) Έστω $W = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ και $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3$. Αποδείξτε ότι το 0 είναι κανονική τιμή της ϕ .

- ii) Έστω A πραγματικός 2×2 πίνακας. Αποδείξτε ότι $\mathrm{rk} A = 1$ εάν και μόνο εάν $\det A = 0$ και $A \neq 0$.

iii) Έστω M το σύνολο όλων των 2×2 πινάκων τάξης 1. Αποδείξτε ότι το M είναι πολλαπλότητα διάστασης 3.

- iv) Υπολογίστε τον εφαπτόμενο χώρο $T_A M$ στο σημείο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(x) = x_1x_4 - x_2x_3$, όπου $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- i) Δείξτε ότι το διαφορικό $D\phi(x)$ έχει τάξη 2 εκτός εάν το x ισούται με $(t^{-2}, t^{-2}, t, t^{-3})$, για κάποιο $t \neq 0$.

ii) Δείξτε ότι το σύνολο $M = \phi^{-1}(0, 0)$ είναι μια πολλαπλότητα διάστασης 2.

- iii) Βρείτε μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_x M$ στα σημεία $x = (x_1, x_2, 0, x_4)$.