

ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις 6

1. Τα διανύσματα $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$. Βρείτε τη δυϊκή βάση του $(\mathbb{R}^2)^*$.

2. Έστω μ μια k -πολυγραμμική συνάρτηση σε έναν διανυσματικό χώρο V . Υποθέτουμε ότι η μ ικανοποιεί την ιδιότητα $\mu(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$ όταν $v_i = v_j$ για κάποια $i \neq j$. Αποδείξτε ότι η μ είναι εναλλάσσουσα.

3. Θεωρούμε τη διγραμμική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^4$, $\mu(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1 + v_3 w_4 - v_4 w_3$. Δείξτε ότι η μ ισούται με $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

4. Έστω V διανυσματικός χώρος και $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in V^*$ γραμμικές μορφές. Το τανυστικό γινόμενο είναι η συνάρτηση $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_k(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mu_1(v_1) \mu_2(v_2) \dots \mu_k(v_k).$$

Αποδείξτε ότι η $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_k$ είναι k -πολυγραμμική συνάρτηση.

5. Έστω $\mu : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ μια k -πολυγραμμική συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\text{Alt}(\mu) : V^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Alt}(\mu)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \mu(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Αποδείξτε τα εξής:

- i) Η συνάρτηση $\text{Alt}(\mu)$ είναι εναλλάσσουσα k -πολυγραμμική.
- ii) Εάν η μ είναι εναλλάσσουσα, τότε $\text{Alt}(\mu) = \mu$.
- iii) $\text{Alt}(\text{Alt}(\mu)) = \text{Alt}(\mu)$, για κάθε k -πολυγραμμική μ .
- iv) Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in V^*$. Τότε ισχύει ότι

$$\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \dots \wedge \mu_k = k! \text{Alt}(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_k).$$

6. Αποδείξτε ότι

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

για κάθε $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

7. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι και $L : V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι $L^*(\lambda \wedge \mu) = L^*(\lambda) \wedge L^*(\mu)$, για κάθε $\lambda, \mu \in W^*$.