

Θεωρία Πιθανοτήτων I - Λύσεις Ασκήσεων 1+

1. (α₁) $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

Ένα υποσύνολο του A που περιέχει το 3 και το 7 έχει τη μορφή

$\Gamma = \{3, 7\} \cup B$, όπου $B \subset \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\} = \Delta$. Άρα όλα τα υποσύνολα της μορφής Γ είναι όσα είναι τα υποσύνολα του Δ , δηλαδή 2^{10} . Επομένως, από τον τύπο του Laplace,

$$P(\text{το υποσύνολο που επιλέγεται τυχαία περιέχει το 3 και το 7}) = \frac{\text{όλα τα ευνοϊκά}}{\text{όλα τα δυνατά}} = \frac{2^{10}}{2^{12}} = \frac{1}{4}$$

(α₂) Ένα υποσύνολο του A έχει πληθυσμό που διαιρείται με το 3 ή το 4 αλλά όχι με το 3 και το 4, αν $|\Gamma| \in \{3, 4, 6, 9, 8\}$. Το πλήθος των υποσυνόλων του A με k στοιχεία είναι $\binom{12}{k}$. Επομένως

$$P(\text{το υποσύνολο έχει πληθυσμό που διαιρείται με το 3 ή το 4 αλλά όχι με το 3 και το 4}) = \frac{\text{όλα τα ευνοϊκά αποτελέσματα}}{\text{όλα τα δυνατά αποτελέσματα}} = \frac{\binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{6} + \binom{12}{9} + \binom{12}{8}}{2^{12}}$$

(β) Ειδική περίπτωση του (γ) για $n=2$.

(γ) $A = \{1, 2, 3, \dots, 12n\}$. Ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθυσμό που διαιρείται με το 3 αν $|\Gamma| = 3k$, $k=1, 2, \dots, 4n$ (Για $k=4n$, $|\Gamma|=3 \cdot 4n=12n$, άρα $\Gamma=A$). Ανάλογα, ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθυσμό που διαιρείται με το 4 αν $|\Gamma| = 4\lambda$, $\lambda=1, 2, \dots, 3n$ (Για $\lambda=3n$, $|\Gamma|=4 \cdot 3n=12n$, άρα $\Gamma=A$). Τέλος, ένα υποσύνολο Γ του A έχει πληθυσμό $|\Gamma|$ που διαιρείται με το 3 και το 4 αν $|\Gamma|=12\mu$, $\mu=1, 2, \dots, n$ (Για $\mu=n$, $|\Gamma|=12n$, άρα $\Gamma=A$). Επομένως όλα τα υποσύνολα του A που διαιρούνται με το 3 ή το 4 αλλά όχι με το 3 και το 4 είναι

$$E = \left\{ \sum_{k=0}^{4n} \binom{12n}{3k} - \sum_{\mu=0}^n \binom{12n}{12\mu} \right\} + \left\{ \sum_{\lambda=0}^{3n} \binom{12n}{4\lambda} - \sum_{\mu=0}^n \binom{12n}{12\mu} \right\}, \text{ οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι } p = \frac{\text{ευνοϊκά}}{\text{δυνατά}} = \frac{E}{2^{12n}}$$

2. (α) $\frac{1}{10^4}$. (β) Τα πολλαπλάσια του 2 είναι οι αριθμοί $2k$, $k=1, 2, \dots, 5000$, τα πολλαπλάσια του 5 είναι οι αριθμοί 5μ , $\mu=1, 2, \dots, 2000$, συνολικά $5000+2000=7000$. Πρέπει όμως να αφαιρεθούν τα πολλαπλάσια του 10, γιατί έχουν μετρηθεί δύο φορές (ως πολλαπλάσια του 2 αλλά και ως πολλαπλάσια του 5) που είναι οι αριθμοί 10λ , $\lambda=1, 2, \dots, 1000$, συνολικά 1000 πολλαπλάσια. Τελικά τα πολλαπλάσια του 2 ή του 5 είναι $7000 - 1000 = 6000$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{\text{ευνοϊκά}}{\text{δυνατά}} = \frac{6000}{10000} = \frac{6}{10}$.

