Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία
Ασκήσεις 4

1. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $\phi : U \to V$ λεία. Έστω c ένας k-κύβος στο U και α μια k-μορφή στο V. Αποδείξτε ότι $\int_c \phi^*(\alpha) = \int_{\phi\circ c} \alpha$.

2. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

i) Έστω b μια $k+1$-αλυσίδα στο U. Έχουμε ορίσει το σύνορο της b ως ένας γραμμικός συνδυασμός από k-κύβους, $\partial b = \sum_i a_i c_i$. Αποδείξτε ότι $\sum_i a_i = 0$.

ii) Έστω c ένας k-κύβος στο U. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $(k+1)$-αλυσίδα b στο U που να ικανοποιεί $\partial b = c$.

3. Ορίζουμε τον 2-κύβο $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $c(t_1,t_2) = (t_1^2, t_1t_2, t_2^2)$ και έστω $\alpha = x_1dx_2 + x_1dx_3 + x_2dx_3$.

i) Σχεδιάστε την εικόνα του κύβου c.

ii) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_c d\alpha$ και $\int_{\partial c} \alpha$ και διαπιστώστε ότι είναι ίσα.

4. Ορίζουμε τον 3-κύβο $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3$, $c(t_1,t_2,t_3) = (t_2t_3, t_1t_3, t_1t_2)$ και έστω $\alpha = x_1dx_2dx_3$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_c d\alpha$ και $\int_{\partial c} \alpha$ και διαπιστώστε ότι είναι ίσα.

5. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα Stokes για να αποδείξετε τα παρακάτω κλασικά ολοκληρωτικά θεωρήματα. Όλες οι συναρτήσεις, διανυσματικά πεδία, αλυσίδες κλπ είναι διαφορίσιμες ποσότητες και ορίζονται σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$. (Κάποιοι τύποι ισχύουν για συγκεκριμένες τιμές του n).

i) $\int_c \mathrm{grad}(g) \cdot d\mathbf{x} = g(c(1)) - g(c(0))$ για κάθε συνάρτηση g και κάθε καμπύλη c.

ii) Τύπος του Green: $\int_c \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial c} (fdx + gdy)$ για κάθε συναρτήσεις f, g και κάθε 2-αλυσίδα c. (Εδώ $n = 2$).

iii) Τύπος του Gauss: $\int_c \mathrm{div}(\mathbf{F}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\partial c} \mathbf{F} \cdot *d\mathbf{x}$ για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ και κάθε n-αλυσίδα c.

iv) Τύπος του Stokes: $\int_c \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot *d\mathbf{x} = \int_{\partial c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ και κάθε 2-αλυσίδα c. (Εδώ $n = 3$).