

ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις 3

1. Θεωρούμε την καμπύλη $c : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a, b > 0$. Έστω $\alpha = xydx + x^2ydy$.

i) Σχεδιάστε την καμπύλη c για $a = 2$ και $b = 1$.

ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_c \alpha$.

2. Έστω $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ κλειστή 1-μορφή στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx) dt$$

ικανοποιεί τη σχέση $dg = \alpha$. (Εδώ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$).

3. Θεωρούμε την 1-μορφή $\alpha = \|x\|^\lambda \sum_{i=1}^n x_i dx_i$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq 0$ έστω c_x το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το 0 και πέρας το x .

i) Δείξτε ότι η α είναι κλειστή μορφή, για κάθε τιμή του λ .

ii) Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση $g(x) = \int_{c_x} \alpha$ είναι καλά ορισμένη και υπολογίστε αυτή αναλυτικά.

iii) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ii) αποδείξτε ότι $dg = \alpha$.