Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία
Ασκήσεις 1

1. Θεωρούμε τις διαφορικές μορφές του $\mathbb{R}^3$ $\alpha = xdx - ydy$, $\beta = zdxdy + xdydz$, $\gamma = zdy$. Υπολογίστε τις μορφές

i) $a \wedge \beta$, $a \wedge \beta \wedge \gamma$, ii) $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.

2. Υπολογίστε την εξωτερική παράγωγο των παρακάτω μορφών:

i) $e^{xy+z^2}dx$, ii) $\sum_{i=1}^n x_i^2 dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n$.

Το σύμβολο $\widehat{\cdot}$ σημαίνει ότι ο αντίστοιχος όρος παραλείπεται.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση. Υπολογίστε την εξωτερική παράγωγο $d \sin f(x)^2$.

4. Ορίζουμε τις συναρτήσεις ξ, η ως

$$\xi(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \eta(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και θεωρούμε τη γωνιακή διαφορική μορφή $\alpha_0 = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. Αποδείξτε ότι $\alpha_0 = -\eta d\xi + \xi d\eta$.

5. Έστω ο $\mathbb{R}^{2n}$ με συντεταγμένες $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ και έστω

$$\omega = dx_1dy_1 + dx_2dy_2 + \cdots + dx_ndy_n = \sum dx_idy_i.$$

Υπολογίστε τη μορφή $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$. (Υπόδειξη: Αρχίστε με τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3$).

6. Έστω ο $\mathbb{R}^{2n+1}$ με συντεταγμένες $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, z)$ και έστω

$$\alpha = dx_1dy_1 + dx_2dy_2 + \cdots + dx_ndy_n = \sum dx_idy_i.$$

Υπολογίστε τη μορφή $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge (d\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha)$

7. Ελέξτε ποιά από τις παρακάτω μορφές $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ είναι κλειστή και σε θετική απάντηση βρείτε συνάρτηση g ώστε $dg = \alpha$.

i) $\alpha = (ye^{xy} - z\sin(xz))dx + (xe^{xy} + z^2)dy + (-x\sin(xz) + 2yz + 3z^2)dz$,

ii) $\alpha = 2xy^3z^4dx + (3x^2y^2z^4 - ze^y\sin(ze^y))dy + (4x^2y^3z^3 - e^y\sin(ze^y) + e^z)dz$.

8. Έστω $\alpha = \sum_{i=1}^n f_idx_i$ μια κλειστή 1-μορφή στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, x_3, \ldots, x_n)dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t, x_3, x_4, \ldots, x_n)dt + \\ &\quad \int_0^{x_3} f_3(0, 0, t, x_4, x_5, \ldots, x_n)dt + \cdots + \int_0^{x_n} f_n(0, 0, \ldots, t)dt. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι $dg = \alpha$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$ και ότι $d\alpha = 0$. Ίσως μελετήστε αρχικά την περίπτωση $n = 2$ όπου $g(x) = \int_o^{x_1} f_1(t, x_2)dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t)dt$).

9. Έστω α, β κλειστές μορφές. Αποδείξτε ότι η μορφή $\alpha \wedge \beta$ είναι κλειστή.

10. Έστω α κλειστή και β ακριβής. Αποδείξτε ότι η μορφή $\alpha \wedge \beta$ είναι ακριβής.

11. ....