ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Επαναληπτική Εξέταση 2016-2017

Θέμα 1 (0.5 μονάδα). Έστω f η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^{-2}$, για $x \in (0, \infty)$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης στο σημείο $x_0 = 1$ για την f.

Θέμα 2 (1 μονάδα). Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & 0 \leq x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ (7x-6)^{-\frac{1}{3}}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ και να υπολογιστεί το $\int_0^2 f(x)\, dx$.

Θέμα 3 (2 μονάδες). Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(α)} \quad \int_1^{\infty} \frac{e^t}{e^{2t} + 3e^t + 2}\, dt \qquad\qquad \text{(β)} \quad \int \sin^5\left(\frac{x}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{3}\right)\, dx$$

Θέμα 4 (2 μονάδες). Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληριώματα:

$$\text{(α)} \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad\qquad \text{(β)} \quad \int_{10}^{\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x}\, dx$$

Θέμα 5 (1 μονάδα). Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση με τύπο

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^7}}$$

για $|x| < \frac{\pi}{2}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγός της.

Θέμα 6 (1 μονάδα). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\pi}^{3\pi} \frac{|x^3 - 9x|}{x(x-3)(x^2 + 4x + 13)}\, dx.$$

Θέμα 7 (2 μονάδες). Έστω $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, θεωρούμε τον εξής διαμερισμό του διαστήματος $[1, 2]$:

$$P_n = \left\{1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, \cdots, 1 + \frac{n}{n} = 2\right\}.$$

(α) Να βρεθούν τα αθροίσματα Darboux $\mathcal{L}(f, P_n)$ και $\mathcal{U}(f, P_n)$.

(β) Με τη βοήθεια των αθροισμάτων Darboux, να βρεθεί το

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Θέμα 8 (1.5 μονάδα). Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι ο αριθμός

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

είναι θετικός για κάθε $a > 1$ και αρνητικός για κάθε $a < 1$. Δείξτε ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.