Λύσεις θέματων στο μάθημα της Άλγεβρας

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Θέμα 1: Α. Να αναλυθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 2x - 2$ σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων στο $\mathbb{Q}[x]$.
Λύση: Το 1 αποτελεί ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$, διότι $f(1) = 0$. Επομένως, το $x - 1$ διαιρεί το $f(x)$. Κάνουμε την ευκλείδεια διαίρεση και έχουμε $f(x) = (x - 1)(x^4 + 8x^2 + 4x + 2)$. Το πολυώνυμο $g_1(x) = (x - 1)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$, γιατί είναι πρώτο βαθμού και κάθε πολυώνυμο πρώτου βαθμού είναι αναγώγο. Το πολυώνυμο $g(x) = x^4 + 8x^2 + 4x + 2$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ από το κριτήριο του *Eisenstein* για $p = 2$. Άρα, η ανάλυση του $f(x)$ σε γίνομενο αναγώγων πολυωνύμων είναι

$$f(x) = (x - 1)(x^4 + 8x^2 + 4x + 2).$$

$\square$

Β. Να δοθεί ένα παράδειγμα δακτυλίου που να είναι πηλίκο του $\mathbb{Z}[x]$, ο οποίος να μην είναι ακεραία περιοχή.
Λύση: Έστω I ένα ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$ και $A = \mathbb{Z}[x]/I$ ο δακτύλιος πηλίκο. Για να μην είναι ο A ακεραία περιοχή αρκεί το I να μην είναι πρώτο. Επόμενως, αρκεί να βρούμε ένα ιδεώδες I του $\mathbb{Z}[x]$ που να μην είναι πρώτο. Θεωρούμε το κύριο ιδεώδες

$$I =< f(x) >=< x^5 - x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 2x - 2 >=< (x - 1)(x^4 + 8x^2 + 4x + 2) >$$
$$= \{r(x)f(x)|f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω ιδεώδες δεν είναι πρώτο, γιατί το $f(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 2x - 2 = (x - 1)(x^4 + 8x^2 + 4x + 2)$ ανήκει στο I, αλλά το $x - 1$ δεν ανήκει στο I, ούτε το $x^4 + 8x^2 + 4x + 2$ ανήκει στο I

Σημείωση: το παραπάνω πολυώνυμο είναι ενδεικτικό. $\square$

Θέμα 2: Α. Αν Α είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και $I, J \subseteq A$ είναι ιδεώδη του με $I \subseteq J$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$J/I = \{a + I|a \in J\}$$

είναι ιδεώδες του δακτυλίου πηλίκου A/I.
Λύση:
Α΄τρόπος: Για να αποδείξουμε ότι το σύνολο J/I είναι ιδεώδες του A/I, αρκεί να δείξουμε ότι

ικανοποιεί τον ορισμό. Καταρχάς, το σύνολο $J/I \neq \emptyset$. Στη συνέχεια έστω $\alpha+I$, $\beta+I$, με $\alpha,\beta \in J$ δυο στοιχεία του συνόλου J/I. Τότε

$$(\alpha+I)-(\beta+I)=(\alpha-\beta)+I.$$

Το παραπάνω στοιχείο ανήκει στο J/I, διότι το $\alpha-\beta \in J$, αφού το J είναι ιδεώδες. Τέλος, έστω $r+I$ ένα στοιχείο του A/I και $\alpha+I$ με $\alpha \in J$ ένα στοιχείο του J/I.Τότε,

$$(r+I)(\alpha+I)=(r\alpha)+I.$$

Το παραπάνω στοιχείο ανήκει στο J/I, διότι το $r\alpha \in J$, αφού το J είναι ιδεώδες.
Β′ τρόπος: Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : A/I \to A/J.$$

Αποδεικνύουμε ότι είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $Kerf = J/I$ και επειδή ο πυρήνας είναι ιδεώδες του A/I, άρα και το J/I θα είναι ιδεώδες. □

Β. Να εξεταστεί αν ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}_{12}/<\bar{4}>$ (όπου $<\bar{4}>$ είναι το ιδεώδες του $\mathbb{Z}_{12}$ που παράγεται από το στοιχείο $\bar{4} \in \mathbb{Z}_{12}$) είναι σώμα.
Λύση:
Α′τρόπος: Το ιδεώδες $<\bar{4}>$ είναι $I=<\bar{4}>=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$. Παρατηρούμε ότι το ιδεώδες $J=<\bar{2}>=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\bar{10}\}$ περιέχει το I, αλλά το $J \neq I$ και $J \neq \mathbb{Z}_{12}$. Επομένως, το I δεν είναι μεγιστικό, οπότε ο δακτύλιος πηλίκο δεν είναι σώμα.
Β′ τρόπος: $\mathbb{Z}_{12}/<\bar{4}> \cong \mathbb{Z}_4$, και το $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι σώμα. □

Θέμα 3: Α. Αν $f : R \to S$ είναι ισομορφισμός μεταξύ αντιμεταθετικών δακτυλίων με μοναδιαίο στοιχείο και ο R είναι ακεραία περιοχή, να αποδειχθεί ότι και ο S είναι ακεραία περιοχή.
Λύση: Αρχικά συμβολίζουμε με 0_R το ουδέτερο στοιχείο του R και 0_S το ουδέτερο στοιχείο του S. Η f είναι ισομορφισμός, οπότε και επί και άρα $\forall\ s \in S\ \exists\ r \in R$ τέτοια ώστε $f(r)=s$. Άρα

$$s_1s_2=0_S \Rightarrow f(r_1)f(r_2)=0_S \Rightarrow f(r_1r_2)=0_S.$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι $r_1r_2 \in Kerf$. Όμως ο f είναι ισομορφισμός, οπότε μονομορφισμός και άρα $Kerf=\{0_R\}$. Επομένως, έχουμε $r_1r_2=0_R$ και επειδή R ακεραία περιοχή προκύπτει ότι $r_1=0_R$ ή $r_2=0_R$. Άρα, $r_1 \in Kerf$, οπότε $s_1=f(r_1)=0_S$ ή $r_2 \in Kerf$, οπότε $s_2=f(r_2)=0_S$. Επομένως, η S είναι ακεραία περιοχή □

Β. Να εξεταστεί αν μπορεί να υπάρχουν αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μοναδιαία στοιχεία A, B, έτσι ώστε ο δακτύλιος των ακεραίων $\mathbb{Z}$ να είναι ισόμορφος με το δακτύλιο $A \times B$.
(Θυμίζουμε ότι το σύνολο $A \times B=\{(\alpha,\beta)|\alpha \in A, \beta \in B\}$ γίνεται δακτύλιος με τις πράξεις $(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$, $(\alpha_1,\beta_1)\cdot(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1\cdot\alpha_2,\beta_1\cdot\beta_2)$, με α_i, $\beta_i \in A$, B, αντίστοιχα, $i=1,2$ και ουδέτερα στοιχεία $(0_A,0_B)$ και $(1_A,1_B)$ ως προς τις πράξεις.)
Λύση: Τα στοιχεία $(0_A,1_B)$ και $(1_A,0_B)$ ανήκουν στο δακτύλιο $A \times B$. Έχουμε

$$(0_A,1_B)\cdot(1_A,0_B)=(0_A,0_B).$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ο δακτύλιος $A \times B$ περιέχει μηδενοδιαρέτες. Άρα, δε μπορούμε να βρούμε δυο αντιμεταθέτικούς δακτυλίους A, B με μοναδιαία στοιχεία ώστε ο δακτύλιος $A \times B$ να είναι ισόμορφος με το $\mathbb{Z}$, διότι ο $\mathbb{Z}$ είναι ακεραία περιοχή και ο $A \times B$ δεν είναι ακεραία περιοχή, και η ιδιότητα της ακεραίας περιοχής μεταφέρεται μέσω του ισομορφισμού. $\square$

Θέμα 4: Α. Δίνεται η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 6 & 11 & 8 & 10 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστεί αν είναι άρτια ή περιττή και να υπολογιστεί η τάξη της στην S_{11}.
Λύση: Θα πρέπει πρώτα να αναλύσουμε τη μετάθεση σε γινόμενο κύκλων. Έτσι, έχουμε

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (1\ 4\ 5)(2\ 3\ 7\ 11)(9\ 10).$$

Η σ_1 έχει μήκος 3, άρα είναι άρτια, η σ_2 έχει μήκος 4, άρα είναι περιττή και η σ_3 έχει μήκος 2 άρα είναι περιττή. Οπότε έχουμε το γινόμενο άρτια $\times$ περιττή $\times$ περιττή που μας κάνει άρτια. Άρα, η σ είναι άρτια. Για την τάξη της σ ισχύει

$$ord(\sigma) = \epsilon\kappa\pi(2, 3, 4) = 12.$$

$\square$

Θέμα 5: Α. Αν ομάδα G έχει τάξη 28 και η υποομάδα $H \leq G$ είναι τέτοια ώστε το πλήθος των αριστερών κλάσεων ισοδυναμίας ως προς H είναι 4, να βρείτε τις υποομάδες της G που περιέχονται στην H.
Λύση: Εφόσον το πλήθος των αριστερών κλάσεων ισοδυναμάς ως προς H είναι 4, αυτό σημαίνει ότι ο δείκτης $|G : H|$ της H στη G θα είναι 4. Επομένως, το Θεώρημα του *Lagrange* δίνει

$$|G| = |G : H||H| \Rightarrow |H| = 7.$$

Επιπλέον, από το Θεώρημα του *Lagrange* προκύπτει ότι η τάξη της υποομάδας θα πρέπει να διαιρεί την τάξη της ομάδας. Άρα, οι υποομάδες της G που θα περιέχονται στην H θα πρέπει να διαιρούν την τάξη αυτής. Εφόσον $|H| = 7$ οι τιμές θα είναι 1, 7. Οπότε οι υποομάδες της G που θα περιέχονται στην H θα είναι η $H_1 = \{e\}$ και η ίδια η H. $\square$

Β. Αν $A, B \trianglelefteq G$ είναι κανονικές υποομάδες της πολλαπλασιαστικής ομάδας G να αποδειχθεί ότι το

$$AB = \{ab \in G | a \in A, b \in B\}$$

είναι υποομάδα της G και να εξεταστεί αν είναι κανονική υπόομαδα αυτής. Να αιτιολογείσετε πλήρως τους ισχυρισμούς σας.
Λύση: Εφόσον $A \trianglelefteq G$, τότε $\forall\ g \in G$ ισχύει $gA = Ag$. Επομένως, $AB = BA$. Θα αποδείξουμε

πρώτα ότι το AB είναι υποομάδα της G. Το σύνολο $AB \neq \emptyset$, διότι $e_G = e_G e_G \in AB$. Θεωρούμε $x_1 = \alpha_1\beta_1$ και $x_2 = \alpha_2\beta_2$ δύο στοιχεία του AB. Έχουμε

$$x_1 x_2^{-1} = (a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1} = (a_1 b_1)(b_2^{-1} a_2^{-1}) = (a_1 b_3) a_2^{-1} = (a_1 a_2^{-1}) b',$$

όπου $a_1 a_2^{-1} \in A$, διότι $A \leq G$ και $a_1, a_2 \in A$ και $b_3 = b_1 b_2^{-1} \in B$ διότι $B \leq G$ ενώ η ύπαρξη ενός κατάλληλου $b' \in B$ για το οποίο ισχύει η τελευταία ισότητα εξασφαλίζεται από την κανονικότητα της υποομάδας B. Άρα το στοιχείο $x_1 x_2^{-1} \in AB$.
Θεωρούμε ένα στοιχείο $x \in AB$, οπότε $x = ab$ και ένα στοιχείο $g \in G$. Έχουμε

$$gxg^{-1} = g(ab)g^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1}.$$

Ομως $gag^{-1} \in A$ και $gbg^{-1} \in B$, λόγω κανονικότητας των υποομάδων αυτών. Άρα $gxg^{-1} \in AB$.

$\square$