Πραγματική ανάλυση Ι. Λύση 2α

1. α. Αν $A \subseteq B$ τότε $\sup A \leq \sup B$. (Σε όλη την άσκηση 1. Τα σύνολα A, B θεωρούνται άνω φραγμένα)

β. Αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ με $x < y$ τότε $\sup A \leq \sup B$ και στην ειδική περίπτωση $A = B$ αποδείξτε ότι το A είναι απειροσύνολο.

γ. Αποδείξτε ότι $s = \sup A$ εάν και μόνο εάν s άνω φράγμα A και $(s - \epsilon, s] \cap A$ διάφορο του $\emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

δ. Αποδείξτε ότι $\sup A = -\inf(-A)$

ε. Αποδείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

ζ. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Όλες οι απαντήσεις στηρίζονται στον ορισμό των sup, inf που ισοδυναμεί με τις σχέσεις

$$x \leq M \forall x \in X \Longleftrightarrow \sup X \leq M, \quad x \geq M \forall x \in X \Longleftrightarrow \inf X \geq M.$$

Λύση

α. Επειδή αν $x \in A$ τότε $x \in B$ έχουμε $x \leq \sup B$ για κάθε $x \in A$, που ισοδυναμεί όπως προείπαμε με την σχέση $\sup A \leq \sup B$.

β. Με βάση την υπόθεση για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $x < y$ και επειδή $y \leq \sup B$ έχουμε $x \leq \sup B$ για κάθε $x \in A$ που ισοδυναμεί με $\sup A \leq \sup B$. Σχετικά με την ειδική περίπτωση $A = B$ αν το A ήταν πεπερασμένο σύνολο θα είχε μέγιστο στοιχείο x. Σύμφωνα όμως με την υπόθεση θα υπήρχε στοιχείο $y \in A$ με $y > x$, άτοπο

γ. Αν $s = \sup A$ τότε s είναι άνω φράγμα του A οπότε $A \subseteq (-\infty, s]$. Αν δεν ίσχυε το ζητούμενο συμπέρασμα θα υπήσχε κάποιος $\epsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε $(s - \epsilon_0, a] \cap A = \emptyset$, δηλαδή δεν θα υπήρχε κανένα σημείο του A στο διάστημα $(s - \epsilon_0, a]$ οπότε όλο το A θα ήταν υποσύνολο στο διάστημα $(-\infty, s - \epsilon_0]$. Στην περίπιτωση αυτή το $s - \epsilon_0$ θα ήταν άνω φράγμα του A, άτοπο διότι θα είχαμε άνω φράγμα γνησίως μικρότερο του sup. Αντιστρόφως Αν θεωρήσουμε άνω φράγμα M με τις προυποθέσεις της άσκησης θα δείξουμε ότι είναι το $s = \sup A = M$. Αν δεν ήταν τότε $s < M$ οπότε για $s = M - \epsilon$ έχουμε $x \leq M - \epsilon$ για κάθε $x \in A$ ή $(M - \epsilon, M] \cap A = \emptyset$, άτοπο με βάση την αρχική υπόθεση.

δ. Για τυχόν $x \in A$ ισχύει $-x \in -A$ οπότε $-x \geq \inf(-A)$ ή $x \leq -\inf(-A)$ για κάθε $x \in A$ που ισοδυναμεί με $\sup A \leq -\inf(-A)$. Αν $t \in -A$ τότε $-t \in A$ οπότε $-t \leq \sup A$ ή $t \geq -\sup A$ για κάθε $t \in -A$ που ισοδυναμεί με $\inf(-A) \geq -\sup A$. Από τις δύο προηγούμενες ανισότητες προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

ε. Από τις σχέσεις $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ προκύπτουν οι σχέσεις $\sup A \leq \sup A \cup B$ και $\sup B \leq \sup A \cup B$. Επειδή κάποιο ένα από τα πρώτα μέλη των προηγούμενων ανισοτήτων είναι το μεγαλύτερο οι δύο ανισότητες συμπτύσονται στην $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup A \cup B$. Σχετικά με την άλλη πλευρά της ανισότητας , για τυχόν $x \in A \cup B$ θα ισχύει $x \in A$ οπότε $x \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ ή $x \in B$ οπότε $x \leq \sup B \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ και τελικά $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

ζ. Για τυχόν $x \in A + B$ έχουμε $x = a + b$ με $a \in A$, $b \in b$ οπότε $x = a + b \leq \sup A + \sup B$ για κάθε $x \in A + B$ που δίνει $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Σχετικά με το άλλο σκέλος της ανισότητας , για τυχόντες αριθμούς $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε $x = a + b \in A + B$ ή $a = x - b \leq \sup(A + B) - b$ για κάθε $a \in A$ που ισοδυναμεί με $\sup A \leq \sup(A + B) - b$. Η τελευταία ανισότητα γράφεται $b \leq \sup(A + B) - \sup A$ για κάθε $b \in B$ που ισοδυναμεί με $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$ ή $\sup(A + B) \geq \sup A + \sup B$ που αποτελεί το δεύτερο σκέλος της ζητούμενης ανισότητας.