ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ$*$ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ $*$ ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 29-8-17

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη με παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου και με πλαίσιο Frenet $\{T(t), N(t)\}$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda N(t)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) και υποθέτουμε ότι $\lambda\kappa(s) \neq 1$, όπου $\kappa(s)$ η καμπυλότητα της γ. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα κ_λ της γ_λ εκφράζεται ως

$$\kappa_\lambda(s) = \frac{k(s)}{|1 - \lambda\kappa(s)|}.$$

[30]

2. Δίνονται οι επίπεδες καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma_1(t) = r(\cos 5t, \sin 5t)$, $\gamma_2(t) = r(\cos(-5t), \sin(-5t))$. Υπολογίστε τις καμπυλότητες κ_1, κ_2 των γ_1, γ_2 αντίστοιχα. Βρείτε μια στερεά κίνηση $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. **[10]**

3. **(α)** Έστω M κανονική επιφάνεια με τοπική παραμέτρηση $X : U \to M$. Υποθέτουμε ότι $(0,0) \in U$. Σκιαγραφήστε μια απόδειξη ότι ο εφαπτομενος χώρος T_pM της M στο σημείο $p = X(0,0)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2. **[10]**

(β) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της κανονικής επιφάνειας με τοπική παραμέτρηση $X(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2)$, στο σημείο $p = (1,0,1)$. **[10]**

4. Θεωρούμε την επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμέτρηση

$$X(u,v) = (\phi(u)\cos v, \phi(u)\sin v, u).$$

Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και τις κύριες καμπυλότητες. **[20]**

5. **(α)** Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας ελάχιστης έκτασης είναι παντού μη θετική. **[5]**

(β) Έστω $p \in M$ ένα ομφαλικό σημείο μιας επιφάνειας M. Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss στο p είναι μη αρνητική. **[5]**

(γ) Δείξτε ότι ένα σημείο $p \in M$ είναι ομφαλικό εάν και μόνο εάν η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα ικανοποιούν τη σχέση $H^2 = K$. **[10]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!