Πραγματική ανάλυση Ι. Ασκήσεις 1α

1. α. Αν $0 < a < 1$ αποδείξτε ότι $a^n[1+n(1-a)] \leq 1$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

β. Αποδείξτε ότι $2^{2^n} > 2^n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Λύση

α. Για $n = 1$ η πρόταση ισοδυναμεί με $1-2a+a^2 \geq 0$ ή ισοδύναμα $(1-a)^2 \geq 0$ που προφανώς ισχύει. Δέχομαι ότι ισχύει για $n = k$ και θα αποδείξω ότι ισχύει για $n = k+1$ δηλαδή $a^{k+1}[1+k+1(1-a)] \leq 1$. Για να εμπλέξω την σχέση $n = k$ θέτω την τελευταια σχέση στην μορφή $a.a^k[1+k(1-a)]+a^{k+1}(1-a) \leq 1$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι έχουμε αποδεχθεί την σχέση για $n = k$ δηλαδή $a^k[1+k(1-a))] \leq 1$ αρκει να αποδείξουμε ότι $a+a^{k+1}(1-a) \leq 1$ ή ισοδύναμα $(1-a)(a^{k+1}-1) < 0$ που προφανώς ισχύει.

β.Για $n = 1$ ισχύει. Δέχομαι ότι ισχύει για $n = k$ και θα αποδείξω ότι ισχύει για $n = k+1$ δηλαδή $2^{2^{k+1}} > 2^{k+1}$ ή ισοδύναμα $(2^{2^k})^2 > 2^{k+1}$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι έχουμε αποδεχθεί την σχέση για $n = k$ αρκει να αποδείξουμε ότι $2^{2k} > 2^{k+1}$ ή ισοδύναμα $k > 1$ που προφανώς ισχύει.

2. α. Αν $a^{33} < b^{33}$ αποδείξτε ότι $a < b$ με χρήση γνώσεων το πολύ Α Λυκείου όπως, αν $a > b > 0$ τότε $a^k > b^k$ ή αν a αρνητικός και k περιττός τότε a^k αρνητικός.

β. Αν $|a-b| < \epsilon$ για κάθε θετικό αριθμό ϵ τότε $a = b$.

Λύση

α. Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει θα έχουμε $a \geq b$. η περίπτωση της ισότητας αποκλέιεται οπότε απομένει $a > b$, οπότε Στην περίπτωση που και οιδύο είναι θετικοί θα έχουμε $a^{33} > b^{33}$, στην περίπτωση που $a > 0 > b$ θα έχουμε $a^{33} > 0 > b^{33}$ και στην περίπτωση που $0 > a > b$ έχουμε διαδοχικά $-b > -a > 0$ $(-a)^{33} > (-b)^{33}$, $-a^{33} > -b^{33}$. $a^{33} > b^{33}$. Και στις τρείς περιπτωσεις καταλήξαμε στο άτοπο (δηλαδή σε συμπέρασμα που αντίκειται στην αρχική μας άρνηση) οπότε το ζητούμενο συμπέρασμα ισχύει.

β. Αν το συμπέρασμα δεν ήταν αληθές θα είχαμε $|a-b| > 0$ οπότε η αρχική υπόθεση για $\epsilon = |a-b|/2$ γίνεται $|a-b| < a-b|/2$ ή $0 > |a-b|/2$, άτοπο.

3. Αν $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{1+x_1}$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$, $n = 1,2,\ldots$ αποδείξτε ότι $x_n < x_{n+1}$ και $0 < x_n < (1+\sqrt{5})/2$, για κάθε φυσικό αριθμό n.

Λύση

Σχετικά με τον πρώτο ισχυρισμό Για $n = 1$ προφανώς τη πρόταση ισχύει. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n = k$ οπότε η ζητούμενη ανισότητα $a_{k+1} < a_{k+2}$ γίνεται $\sqrt{1+x_k} < \sqrt{1+x_{k+1}}$ που ισοδυναμεί με $x_k < x_{k+1}$ που την έχουμε αποδεχθεί. Συνεχίζοντας με το επόμενο ερώτημα Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n = k$ οπότε η ζητούμενη ανισότητα

$0 < x_{k+1} < (1+\sqrt{5})/2$ ισοδυναμεί με $1+x_k < ((1+\sqrt{5})/2)^2$ και μετά τις στοιχειώδεις πράξεις $x_k < (1+\sqrt{5})/2$ που την έχουμε αποδεχθεί.