ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Εξέταση Εαρινού Εξαμήνου 2016-2017

Σημείωση: Όλες οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Θέμα 1 (1.5 μονάδα). Έστω f η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 24\sin x - 3\sin(2x)$.
(α) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor τέταρτου βαθμού της f στο σημείο $x_0 = 0$.
(β) Να αποδειχθεί η ανισότητα Huygens:

$$|24\sin x - 3\sin(2x) - 18x| \leq |x|^5, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση.
(α) Έχουμε $f'(x) = 24\cos x - 6\cos(2x)$, $f''(x) = -24\sin x + 12\sin(2x)$, $f^{(3)}(x) = -24\cos x + 24\cos(2x)$ και $f^{(4)}(x) = 24\sin x - 48\sin(2x)$. Άρα $f'(0) = 18$, $f(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$. Επομένως, το πολυώνυμο Taylor τέταρτου βαθμού της f στο σημείο $x_0 = 0$ ισούται με

$$T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 = 18x.$$

(β) Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου, έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - T(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5.$$

Αφού $f^{(5)}(c) = 24\cos(c) - 96\cos(2c)$, έπεται ότι $|f^{(5)}(c)| \leq 24|\cos(c)| + 96|\sin(2c)| \leq 24 + 96 = 120$. Άρα

$$|24\sin x - 3\sin(2x) - 18x| = |f(x) - T(x)| \leq \frac{120\ |x|^5}{5!} = |x|^5.$$

Θέμα 2 (1.5 μονάδα). Έστω f η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{x^8 - 2x^7 + 3x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

(α) Δίνεται ότι το παραπάνω κλάσμα είναι ανάγωγο και αναλύεται σε άθροισμα απλών (μερικών) κλασμάτων με μόνο έναν από τους παρακάτω πέντε τρόπους. Βρείτε τη σωστή ανάλυση χωρίς να κάνετε πράξεις.

1. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x^2+1} + \frac{2x+4}{(x^2+1)^2}$
2. $x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)} + \frac{3}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)^2}$
3. $x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
4. $x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+1}$
5. $x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

(β) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)\, dx$.

Λύση.
(α) Το κλάσμα έχει αριθμητή με βαθμό 8 και παρονομαστή με βαθμό 6, άρα η σωστή ανάλυση σε απλά κλάσματα δεν μπορεί να είναι η πρώτη (διαφορετικά, κάνοντας τα απλά κλάσματα ομώνυμα ο αριθμητής θα είχε βαθμό το πολύ 5). Το $x - 2$ δεν είναι διαιρέτης του παρονομαστή, άρα η σωστή ανάλυση δεν μπορεί να είναι η δεύτερη. Δίνεται ότι το κλάσμα είναι ανάγωγο, άρα η σωστή ανάλυση πρέπει να περιέχει απλό

κλάσμα με παρονομαστή $(x-1)^2$ και απλό κλάσμα με παρονομαστή $(x^2+1)^2$. Επομένως, ούτε η πέμπτη ούτε η τέταρτη ανάλυση μπορεί να είναι σωστή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σωστή ανάλυση είναι η τρίτη.
(β) Από την απάντηση στο (α), έχουμε ότι

$$\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + 3\arctan x - \frac{1}{x^2+1} + C,$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

Θέμα 3 (1 μονάδα). Να εξεταστεί η σύγκλιση των παρακάτω γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

(α) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^9+5}}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}\,dx$

Λύση.
(α) Επειδή

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^9+5}} \le \frac{x^2}{\sqrt{x^9}} = \frac{1}{x^{5/2}},$$

για $x \ge 1$ και το

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/2}}\,dx$$

συγκλίνει (διότι $\frac{5}{2} > 1$), έπεται ότι και το

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^9+5}}\,dx$$

συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.
(β) Το δοσμένο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο δεύτερου είδους (στο 0). Επειδή

$$0 < \frac{1}{x} \le \frac{1}{x\sin x},$$

για $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ και το

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx$$

αποκλίνει, έπεται ότι και το

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}\,dx$$

αποκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.

Θέμα 4 (2 μονάδες). Να υπολογιστούν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-3x}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

Λύση.
(α) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση δύο φορές, έχουμε ότι

$$\int x^2 e^{-3x}\,dx = -\frac{x^2e^{-3x}}{3} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}\,dx = -\frac{x^2e^{-3x}}{3} - \frac{2xe^{-3x}}{9} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}\,dx$$

$$= -\frac{x^2e^{-3x}}{3} - \frac{2xe^{-3x}}{9} - \frac{2e^{-3x}}{27} + C\ ,$$

όπου $C \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^2e^{-3x}\ dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b^2e^{-3b}}{3} - \frac{2be^{-3b}}{9} - \frac{2e^{-3b}}{27} + \frac{2}{27}\right) = \frac{2}{27}.$$

(β) Το δοσμένο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο δεύτερου είδους στο 4. Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $u = x - 2$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}}\ dx = \int \frac{u+2}{\sqrt{4-u^2}}\ du = \int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}}\ du + 2\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\ du$$

$$= -\sqrt{4-u^2} + 2\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + C = -\sqrt{4x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C\ ,$$

όπου $C \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\ dx = \lim_{b\to 4-}\int_1^b \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\ dx$$

$$= \lim_{b\to 4-}\left(-\sqrt{4b-b^2} + 2\arcsin\left(\frac{b-2}{2}\right) + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}.$$

Θέμα 5 (1.5 μονάδα). Έστω $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x\log x$.
(α) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,\infty)$.
(β) Δείξτε ότι $(x+y)^{x+y} \leq (2x)^x(2y)^y$, για κάθε $x,\ y \in (0,\infty)$.

Λύση.
(α) Έχουμε $f'(x) = 1 + \log x$ και $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ στο $(0,\infty)$. Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,\infty)$.
(β) Έστω $x,\ y \in (0,\infty)$. Επειδή η f είναι κυρτή, από την ανισότητα Jensen έπεται ότι

$$f\left(\frac{2x+2y}{2}\right) \leq \frac{f(2x)+f(2y)}{2},$$

δηλαδή

$$f(x+y) \leq \frac{f(2x)+f(2y)}{2},$$

άρα

$$(x+y)\log(x+y) \leq x\log(2x) + y\log(2y),$$

επομένως

$$\log\left((x+y)^{x+y}\right) \leq \log\left((2x)^x(2y)^y\right).$$

Αφού η λογαριθμική συνάρτηση είναι αύξουσα, έπεται ότι $(x+y)^{x+y} \leq (2x)^x(2y)^y$.

Θέμα 6 (1 μονάδα). Έστω $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_1^x f(t)\ dt = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{2},$$

για κάθε $x \geq 1$. Να υπολογιστεί το $f(2)$.

Λύση. Έστω $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Επειδή η f είναι συνεχής, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού συνεπάγεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F' = f$. Επομένως,

$$f(x) = F'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}},$$

για κάθε $x \geq 1$. Θέτοντας $x = 2$, παίρνουμε $f(2) = 2$.

Θέμα 7 (1.5 μονάδα). Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο [0,5].
(α) Έστω P διαμέριση του $[0,5]$ τέτοια ώστε $\mathcal{U}(f,P) = 4$. Υπολογίστε το $\mathcal{U}(1+f,P)$.
(β) Για $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, έστω Q_n η διαμέριση $\{0, \frac{5}{n}, \frac{10}{n}, \ldots, \frac{5(n-1)}{n}, 5\}$ του $[0,5]$. Αν

$$\mathcal{L}(f,Q_n) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \qquad \text{και} \qquad \mathcal{U}(f,Q_n) = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \ ,$$

για κάθε n, να υπολογιστεί το

$$\int_0^5 f(x)\ dx.$$

Λύση.
(α) Έστω ότι η P δίνεται από $\{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 5\}$. Έχουμε

$$4 = \mathcal{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

όπου $M_k = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, για $k \in \{1, \ldots, n\}$. Επειδή

$$\sup\{1 + f(x) \colon x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1 + \sup\{f(x) \colon x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1 + M_k,$$

για κάθε k, έπεται ότι

$$\mathcal{U}(1+f,P) = \sum_{k=1}^{n}(1+M_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 + \mathcal{U}(f,P) = 5+4 = 9.$$

(β) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,5]$, έχουμε ότι

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \mathcal{L}(f,Q_n) \leq \int_0^5 f(x)\ dx \leq \mathcal{U}(f,Q_n) = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}.$$

Αφού

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right) \ ,$$

το θεώρημα παρεμβολής συνεπάγεται ότι

$$\int_0^5 f(x)\ dx = e^2.$$