ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Εξέταση Εαρινού Εξαμήνου 2016-2017

Θέμα 1 (1 μονάδα).
(α) Βρείτε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(β) Πόσες είναι οι κλάσεις ομοιότητας πινάκων στο $M_{6,6}(\mathbb{C})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x-2)^5(x-3)$ και ελάχιστο πολυώνυμο $(x-2)^2(x-3)$;

Λύση.
(α) Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ισούται με $(x-2)^3$. Επομένως η κανονική μορφή Jordan του A είναι ο 3×3 Jordan block πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(β) Συνδυάζοντας την ανάλυση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με την ανάλυση του ελάχιστου πολυωνύμου σε γινόμενα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων, βλέπουμε ότι τα μόνα πιθανά πολυσύνολα στοιχειωδών διαιρετών του A είναι τα

$$\{(x-2)^2,\ (x-2)^2,\ x-2,\ x-3\}$$
$$\{(x-2)^2,\ x-2,\ x-2,\ x-2,\ x-3\}.$$

Επομένως, υπάρχουν δύο κλάσεις ομοιότητας τέτοιων πινάκων.

Θέμα 2 (2 μονάδες). Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

στο $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
(α) Δείξτε ότι ο B είναι θετικά ορισμένος.
(β) Τι είδους καμπύλη στο επίπεδο περιγράφει η εξίσωση $x^2 - 4xy + 9y^2 = 12$;
(γ) Είναι οι A και B ισότιμοι;
(δ) Είναι οι A και B όμοιοι;

Λύση.
(α) Οι ορίζουσες των 1×1 και 2×2 κύριων υποπινάκων του B ισούνται με 1 και 5, αντίστοιχα, άρα ο B είναι θετικά ορισμένος.
(β) Οι ιδιοτιμές του B είναι θετικές (αφού ο B είναι θετικά ορισμένος), άρα, με κατάλληλη αλλαγή βάσης του $\mathbb{R}^2$, η δοσμένη εξίσωση περιγράφει έλλειψη στο επίπεδο.
(γ) Εύκολα δείχνουμε ότι και ο A είναι θετικά ορισμένος. Άρα οι A και B είναι ισότιμοι, διότι, από το νόμο αδράνειας του Sylvester, καθένας από τους A και B είναι ισότιμος με τον ταυτοτικό πίνακα.
(δ) Όχι, διότι οι A και B δεν έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Θέμα 3 (1 μονάδα). Έστω $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο $T(v) = Av$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τη διάσπαση Jordan-Chevalley της T και υπολογίστε τον πίνακα e^A.

Λύση. Ο A είναι σε μορφή (ανάστροφου) Jordan block, άρα από τη θεωρία, η διάσπαση Jordan-Chevalley δίνεται από $A = D + N$, όπου

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφού οι D και N αντιμετατίθενται, έπεται ότι

$$e^A = e^N e^D = (I+N)\, e^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 4 (1.5 μονάδα). Έστω A μη αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας με μιγαδικά στοιχεία. Δίνεται ότι οι αριθμοί 1 και 2 είναι ιδιοτιμές του A.
(α) Βρείτε την κανονική μορφή Jordan του A.
(β) Δείξτε ότι $A^{n+1} = (2^n - 1)A^2 - (2^n - 2)A$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα $B = A^5 + A^4 - 7A^3 + 8A$.

Λύση.
(α) Αφού ο A είναι μη αντιστρέψιμος, έπεται ότι το 0 είναι επίσης ιδιοτιμή του. Άρα ο A έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές (τις 0, 1 και 2), άρα είναι διαγωνίσιμος και επομένως η κανονική μορφή Jordan του A είναι ο πίνακας

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(β) Αφού ο A είναι διαγωνίσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $J = P^{-1}AP$. Αρκεί προφανώς να δείξουμε ότι $J^{n+1} = (2^n - 1)J^2 - (2^n - 2)J$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι ένας απλός υπολογισμός με διαγώνιους πίνακες.
(γ) Έχουμε $B = f(A)$, όπου $f(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 8x$. Από το θεώρημα φασματικής απεικόνισης, έπεται ότι οι ιδιοτιμές του B είναι οι $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ και $f(2) = 8$.

Θέμα 5 (1 μονάδα). Έστω $V = \mathbb{R}^2$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έστω $T \in \mathcal{L}(V, V)$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Δείξτε ότι η T είναι αυτοσυζυγής και βρείτε ορθοκανονική βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T είναι διαγώνιος.

Λύση. Ο πίνακας της T ως προς τη συνήθη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

άρα ο T είναι αυτοσυζυγής. Κάνοντας ορθογώνια διαγωνοποίηση του A, βρίσκουμε ο πίνακας της T ως προς την ορθοκανονική βάση

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

είναι διαγώνιος και ίσος με τον

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 6 (1 μονάδα). Έστω $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2 + A + 4I = 0$. Δείξτε ότι ο n είναι άρτιος και βρείτε τη ρητή κανονική μορφή του A.

Λύση. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m(x)$ του A διαιρεί το ανάγωγο πολυώνυμο $x^2 + x + 4 \in \mathbb{R}[x]$, επομένως, $m(x) = x^2 + x + 4$. Άρα, οι στοιχειώδεις διαιρέτες του A είναι όλοι ίσοι με $m(x)$. Επομένως, η ρητή κανονική μορφή του A θα είναι block-διαγώνιος πίνακας με κάθε διαγώνιο block ίσο με τον 2×2 συνοδό πίνακα

$$C(m(x)) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Αν k το πλήθος των διαγώνιων blocks της ρητής κανονικής μορφής του A, έπεται ότι $n = 2k$, άρα ο n είναι άρτιος.

Θέμα 7 (0.5 μονάδα). Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Αν W υπόχωρος του V, συμβολίζουμε με $A(W)$ τον υπόχωρο του δυικού χώρου V^* που αποτελείται από όλες τις γραμμικές μορφές $\phi \in V^*$ για τις οποίες ισχύει ότι $\phi(w) = 0$, για κάθε $w \in W$. Έστω W_1, W_2 υπόχωροι του V. Δείξτε ότι $A(W_1 + W_2) = A(W_1) \cap A(W_2)$.

Λύση. Αν $\phi \in A(W_1 + W_2)$, τότε $\phi(v) = 0$, για κάθε $v \in W_1 + W_2$. Αφού $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$, έπεται ειδικότερα ότι $\phi(v) = 0$, για κάθε $v \in W_1$ και για κάθε $v \in W_2$. Άρα $\phi \in A(W_1) \cap A(W_2)$. Αντίστροφα, έστω $\phi \in A(W_1) \cap A(W_2)$. Τότε $\phi(w_1 + w_2) = \phi(w_1) + \phi(w_2) = 0 + 0 = 0$, για κάθε $w_1 \in W_1$ και για κάθε $w_2 \in W_2$, δηλαδή $\phi(v) = 0$, για κάθε $v \in W_1 + W_2$. Επομένως, $\phi \in A(W_1 + W_2)$.

Θέμα 8 (1 μονάδα). Έστω A κανονικός $n \times n$ πίνακας με μιγαδικά στοιχεία ο οποίος έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι $A = \lambda I$. Προκύπτει το συμπέρασμα χωρίς την υπόθεση ότι ο A είναι κανονικός;

Λύση. Ο A είναι εναδικά διαγωνίσιμος (ως κανονικός) και έχει ιδιοτιμή λ αλγεβρικής πολλαπλότητας n. Με άλλα λόγια, υπάρχει εναδικός πίνακας P τέτοιος ώστε $A = P^{-1}(\lambda I)P$, άρα $A = \lambda I$. Η υπόθεση ότι ο A είναι κανονικός είναι απαραίτητη: π.χ. για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{C}$, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

έχει μοναδική ιδιοτιμή λ, αλλά δεν ισούται με λI.

Θέμα 9 (0.5 μονάδα). Έστω A ερμιτιανός 3×3 πίνακας με $A^3 - A^2 + A - I = 0$. Δείξτε ότι $A = I$.

Λύση. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m(x)$ του A διαιρεί το $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$ και όλες οι ιδοτιμές του A είναι ρίζες του $m(x)$. Αφού όλες οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί, έπεται ότι $m(x) = x - 1$. Άρα $A = I$.

Θέμα 10 (0.5 μονάδα). Θεωρούμε τον μιγαδικό διανυσματικό χώρο V όλων των συναρτήσεων $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιαμού. Έστω $T \in \mathcal{L}(V, V)$ η γραμμική απεικόνιση που δίνεται από τις σχέσεις $T(f)(0) = 0$ και $T(f)(n) = f(n-1)$, για κάθε $n \geq 1$. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν ιδιοτιμές της T.

Λύση. Έστω ότι υπήρχε ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $f \neq 0$. Τότε $T(f)(n) = \lambda f(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda f(0) = 0$ και $f(n-1) = \lambda f(n)$, για κάθε $n \geq 1$. Αν $\lambda = 0$, τότε $f(n-1) = 0$, για κάθε $n \geq 1$, δηλαδή $f(m) = 0$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα $f = 0$, άτοπο. Επομένως, $\lambda \neq 0$. Συνεπώς, $f(0) = 0$ και $f(n-1) = \lambda f(n)$, για κάθε $n \geq 1$. Μια εύκολη επαγωγή δίνει ότι $f(n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f = 0$, άτοπο.