Λύσεις θεμάτων της εξέτασης στην Αλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

23 Ιουνίου 2017

Θέμα 1: A. Να αναλυθεί το πολυώνυμο $f(x) = x^{11} - x^7 - x^5 + x$ σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων στο $\mathbb{Q}[x]$.

B. Να εξεταστεί αν το σύνολο των πολυωνύμων στο $\mathbb{Z}[x]$ που έχουν μόνο άρτιες δυνάμεις του x αποτελεί ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$.

Λύση: A. Είναι

$$x^{11} - x^7 - x^5 + x = x^7(x^4 - 1) - x(x^4 - 1) = x(x^6 - 1)(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$= x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) = x(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

όπου οι δευτεροβάθμιοι όροι είναι ανάγωγοι (για τους δύο τελευταίους μπορούμε να το διαπιστώσουμε με τη βοήθεια της διακρίνουσας).

B. Η απορροφητική ιδιότητα ενός ιδεώδους απαιτεί το γινόμενο ενός στοιχείου του δοσμένου συνόλου με ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{Z}[x]$ να είναι στο σύνολο. Ομως, πχ, το x^2 ανήκει στο σύνολο και το γινόμενό του με το x, δηλαδή το πολυώνυμο x^3 δεν ανήκει στο σύνολο. Αρα το σύνολο αυτό δεν είναι ιδεώδες.

Θέμα 2: A. Να εξεταστεί αν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα

$$f(x) = x^5 + 6x^4 + 18x + 3 \text{ στο } \mathbb{Q}[x], \qquad g(x) = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2} \text{ στο } \mathbb{Z}_3[x]$$

κι αν όχι να αναλυθούν σε γινόμενα ανάγωγων παραγόντων.

B. Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}_3[x]/ < x^2 + x + \overline{2} >$ είναι σώμα. Να βρείτε την τάξη της ομάδας $U(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του.

Λύση: A. Το πρώτο προκύπτει εύκολα ότι είναι ανάγωγο από μία απλή εφαρμογή του κριτηρίου του Eisenstein για $p = 3$.

Στο δεύτερο δοκιμάζουμε αν έχει ρίζες στο $\mathbb{Z}_3$ και βρίσκουμε ότι $g(\overline{2}) = \overline{0}$, άρα διαιρείται από το $x - \overline{2}$. Εκτελώντας τη διαίρεση βρίσκουμε $g(x) = (x - \overline{2})(x^2 + x + \overline{2})$. Δοκιμάζοντας αν έχει ρίζες το $x^2 + x + 2$ διπιστώνουμε ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει, άρα είναι ανάγωγο.

B. Από το αμέσως προηγούμενο, επειδή το $x^2 + x + \overline{2}$ είναι ανάγωγο προκύπτει ότι ο δακτύλιος - πηλίκο δια το ιδεώδες που παράγει αυτό το πολυώνυμο είναι σώμα.

Το σώμα αυτό έχει στοιχεία της μορφής $ax + b + I$. Με I συμβολίζουμε το ιδεώδες $< x^2 + x + \overline{2} >$, το οποίο παράγεται από πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Επομένως τα υπόλοιπα της διαίρεσης δι αυτό, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις κλάσεις ισοδυναμίας, θα είναι μέχρι πρώτου βαθμού. Υπάρχουν $3 \times 3 = 9$ δυνατοί συνδυασμοί από στοιχεία a, $b \in \mathbb{Z}_3$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλα αντιπροσωπεύουν διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας (οι διαφορές τους ανά δύο δε διαιρούνται από το $x^2 + x + \overline{2}$). Με άλλα λόγια το σώμα αυτό έχει 9 στοιχεία, άρα η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του έχει 8 στοιχεία.

Θέμα 3: Εστω A αντιμεταθετικός δακτύλιος (με μονάδα) και I, J δύο ιδεώδη του που είναι τέτοια ώστε $I \not\subseteq J$ και $J \not\subseteq I$. Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος - πηλίκο $A/(I \cap J)$ δεν είναι ακέραια περιοχή.

Λύση: Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο δακτύλιος - πηλίκο είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν το ιδεώδες δια το οποίο διαιρούμε είναι πρώτο.

Εφόσον όμως $I \not\subseteq J$, υπάρχει $x \in I$ που δεν ανήκει στο J και εφόσον $J \not\subseteq I$, υπάρχει $y \in J$ που δεν ανήκει στο I. Τότε όμως ούτε το x ανήκει στην τομή $I \cap J$ (αφού δεν ανήκει στο J) ούτε το y ανήκει στη τομή αυτή (αφού δεν ανήκει στο I). Από την άλλη πλευρά, από την ιδιότητα του ιδεώδους, το xy ανήκει στο I (αφού το x ανήκει) και επίσης ανήκει στο J (αφού το y ανήκει). Αρα το xy ανήκει στο ιδεώδες $I \cap J$, χωρίς ούτε το x ούτε το y να ανήκει στο $I \cap J$. Επομένως το $I \cap J$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

Θέμα 4: Δίνεται η παρακάτω μετάθεση.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Να αναλυθεί σε γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων. Να χαρακτηριστεί αν είναι άρτια ή περιττή. Να βρεθεί η τάξη αυτής.

Λύση: Σύμφωνα με τη μέθοδο απόδειξης του θεωρήματος περί ανάλυσης μίας μετάθεσης σε γινόμενο ξένων κύκλων εντοπίζουμε αρχικά έναν κύκλο στη μετάθεση, πχ τον $(1\ 4\ 5)$, και γνωρίζουμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφό του θα βρούμε μια μετάθεση που θα περιέχει μόνο τους λοιπούς κύκλους της δοσμένης. Ενας ακόμα τέτοιος κύκλος είναι ο $(2\ 6)$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία θα προκύψει μετάθεση με τους λοιπούς κύκλους της αρχικής. Εντοπίζουμε λοιπόν τον κύκλο $(3\ 8\ 9\ 7)$, ο οποίος είναι και ο τελευταίος που βρίσκεται στη μετάθεση (πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφό του πλέον θα βρούμε την ταυτοτική μετάθεση). Αρα

$$\sigma = (1\ 4\ 5) \circ (2\ 6) \circ (3\ 8\ 9\ 7)$$

Ο πρώτος κύκλος της ανάλυσης είναι τάξης 3, ο δεύτερος είναι τάξης 2 και ο τρίτος είναι τάξης 6. Αρα η σ έχει τάξη ίση με ε.κ.π$(3, 2, 6) = 12$.

Ο πρώτος κύκλος της ανάλυσης αναλύεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων $(1\ 4\ 5) = (1\ 5) \circ (1\ 4)$, ο δεύτερος είναι αντιμετάθεση και ο τελευταίος αναλύεται, ομοίως σε γινόμενο $(3\ 8\ 9\ 7) = (3\ 7) \circ (3\ 9) \circ (3\ 8)$. Εχουμε λοιπόν ανάλυση της σ σε γινόμενο $2 + 1 + 3 = 6$ αντιμεταθέσεων, δηλαδή είναι άρτια μετάθεση.

Θέμα 5: Θεωρούμε μία αβελιανή ομάδα G (γράφουμε τη διμελή πράξη της πολλαπλασιαστικά και ουδέτερο στοιχείο e), με τάξη $|G|$ περιττό αριθμό. Αποδείξτε ότι, για κάθε $g \in G$ υπάρχει $x \in G$ τέτοιο ώστε $x^2 = g$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $f\colon G \to G$ με $f(x) = x^2$. Είναι ομομορφισμός; Μπορεί να υπάρχει $x \neq e$ με $x^2 = e$;)

Λύση: Η f είναι πράγματι ομομορφισμός αφού

$$f(xy) = (xy)^2 = (xy)(xy) = x(yx)y = x(xy)y = x^2y^2 = f(x)f(y).$$

Αν υπήρχε $x \neq e$ με $x^2 = e$ τότε αυτό το x θα είχε τάξη 2 και αυτή η τάξη θα έπρεπε να διαιρεί την τάξη της ομάδας, η οποία όμως είναι περιττός αριθμός, άρα κάτι τέτοιο δε μπορεί να συμβαίνει. Αυτό σημαίνει ότι ο πυρήνας της f περιέχει μόνο το e, δηλαδή $|\ker(f)| = 1$. Γνωρίζουμε όμως ότι $|G| = |\ker(f)| \cdot |\mathrm{im}(f)|$. Αρα $|G| = |\mathrm{im}(f)|$, δηλαδή η εικόνα της f, που είναι υποσύνολο της G, έχει τόσα στοιχεία όσα και η G. Αρα $G = \mathrm{im}(f)$. Επομένως η f είναι επί, δηλαδή για κάθε $g \in G$ υπάρχει $x \in G$ τέτοιο ώστε $g = f(x) = x^2$.

Μια πιό απλή λύση είναι η εξής: Το g υψωμένο στην τάξη της ομάδας δίνει e. Δηλαδή $g^{2k+1} = e$, άρα $g^{2k+2} = g$. Επομένως το ζητούμενο x είναι το g^{2k}. (Ευχαριστώ τον Γ. Προτσώνη που μου την έθεσε υπ' όψη.)