ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι 16-6-17 $*$

Όνομα: Α.Μ.

Παραδώστε το παρόν μαζί με την κόλλα

1. Βρείτε μια βάση του χώρου $\text{span}\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, όπου $\alpha = (1,2,3,4)$, $\beta = (2,3,4,5)$, $\gamma = (3,4,5,6)$, $\delta = (4,5,6,7)$. **[10]**

2. Έστω $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = x_1 + x_2, x_4 = x_1 - x_2\}$.
α) Δείξτε ότι W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.
β) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του W.
γ) Δείξτε ότι το σύνολο $\text{span}\{(1,0,1,1)\}$ είναι υπόχωρος του W. **[10]**

3. Έστω E_{ij} ο 2×2 πίνακας με 1 στην (i,j)-θέση και 0 στις υπόλοιπες. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ η απεικόνιση $T(X) = AX$.
α) Αποδείξτε ότι η T είναι γραμμική.
β) Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.
γ) Βρείτε τις διαστάσεις των υποχώρων $\text{Ker}T$, $\text{Im}T$ καθώς και βάσεις αυτών. **[15]**

4. Δίνεται ο γραμμικός τελεστής $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ με τύπο $D(p(x)) = p'(x)$.
α) Βρείτε τον πίνακα του D ως προς τη διατεταγμένη βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$.
β) Βρείτε τις ιδιοτιμές των απεικονίσεων D και $D + \text{Id}$.
γ) Είναι ο D διαγωνιοποιήσιμος; **[20]**

5. Έστω $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα S τέτοιον ώστε ο $S^{-1}AS$ να είναι διαγώνιος. **[15]**

6. Βρείτε την ορθή προβολή του διανύσματος $v = (1,-2,3,-4) \in \mathbb{R}^4$ κατά μήκος του υπόχωρου $W = \text{span}\{(1,2,1,2)\}$ (θεωρούμε το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$). **[9]**

7. Χαρακτηρίστε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ), δίνοντας σύντομη αιτιολόγηση.
α) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
β) Αν το 0 είναι μια ιδοτιμή ενός $n \times n$ πίνακα A τότε $\text{rk}A < n$.
γ) Έστω A ένας 2×2 πραγματικός πίνακας του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{R}$.
δ) Εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει λιγότερες από n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε αυτός δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.
ε) Έστω $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ γραμμικός τελεστής. Εάν υπάρχει κάποια βάση β του $\mathbb{F}^2$ ώστε ο πίνακας $[T]_\beta$ να μην είναι διαγώνιος, τότε η T δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος.
στ) Κάθε υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχει τουλάχιστον μια ορθογώνια βάση.
ζ) Η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{R}$ είναι 1. **[21]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!