ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΦΡΑΚΤΑΛΣ

Θέματα Εξετάσεων
15/6/2017

Σταύρος Αναστασίου
Διδάσκων

Θέμα 1^o: Θεώρημα σταθερού σημείου του Bannach και συστήματα με απλή ολική συμπεριφορά

α) Διατυπώστε το θεώρημα σταθερού σημείου του Bannach για συναρτήσεις της μορφής $f : D \to D$, όπου D κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
β) Θεωρούμε διαφορίσιμη απεικόνιση $f : C \to \mathbb{R}^n$, όπου C ανοιχτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $\| Df(x) \| < M,\ M > 0$, να δείξετε ότι

$$\| f(x) - f(y) \| \leq M \| x - y \|,\ \forall x, y \in C.$$

γ) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\tfrac{1}{10}(1 - y - \sin(x+y)), \tfrac{1}{10}(2 + x + \cos(x-y))\right).$$

Δείξτε ότι η f είναι συστολή σε όλο το επίπεδο, και περιγράψτε την ολική της ποιοτική συμπεριφορά, εάν είναι γνωστό ότι η f έχει σταθερό σημείο στη θέση $(x_0, y_0) \simeq (0.036, 0.3)$. Θεωρήστε δεδομένο ότι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\cos(x+y) & -\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\cos(x+y) \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sin(x-y) & \frac{1}{10}\sin(x-y) \end{bmatrix}$$

έχει στάθμη το πολύ 3/10.

(2 μονάδες)

Θέμα 2^o: Τοπολογική συζευξιμότητα και γραμμικά δυναμικά συστήματα

α) Έστω X τοπολογικός χώρος και $f, g : X \to X$ δύο δυναμικά συστήματα κλάσης C^1. Πότε αυτά ονομάζονται τοπολογικώς συζεύξιμα;
β) Να κατασκευάσετε τον ομοιομορφισμό του επιπέδου που καθιστά τοπολογικώς συζεύξιμα τα $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2x, -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y),\ g(x,y) = (2x, \frac{1}{2}y)$.
γ) Να κατασκευάσετε τον αναλυτικό τύπο των τροχιών του f.

(2 μονάδες)

Θέμα 3^o: Τοπικές διακλαδώσεις

α) Έστω $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, κλάσης C^2, η οποία εξαρτάται κατά τρόπο λείο από την πραγματική παράμετρο c. Αν για $c = c_0$, στο σταθερό σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ της f ισχύουν τα

$$f_{c_0}(x_0) = x_0, \ \frac{\partial f_c}{\partial x}(x_0, c_0) = 1, \ \frac{\partial f_c}{\partial c}(x_0, c_0) \neq 0, \ \frac{\partial^2 f_c(x)}{\partial x^2}(x_0, c_0) \neq 0,$$

λέμε ότι η f υφίσταται στο σημείο αυτό διακλάδωση σάγματος–κόμβου. Ποιο το γεωμετρικό νόημα των συνθηκών αυτών;

β) Να εξηγήσετε πώς οδηγούμαστε στην τρίτη συνθήκη.

γ) Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_c(x) = -x - c - 1 - x^2$. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα διακλάδωσής του.

δ) Να δείξετε, κάνοντας χρήση των παραπάνω συνθηκών, ότι το δυναμικό αυτό σύστημα υφίσταται διακλάδωση σάγματος–κόμβου.

(1.5 μονάδα)

Θέμα 4^o: Χάος

α) Να δώσετε τον ορισμό του χάους για δυναμικά συστήματα της μορφής $f : X \to X$, όπου X τοπολογικός χώρος.

β) Να ορίσετε την απεικόνιση μετατόπισης δύο συμβόλων $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ και να αποδείξετε ότι είναι χαοτική (ο χώρος Σ_2^+ είναι συμπαγής).

γ) Ποιο δυναμικό σύστημα του κύκλου είναι χαοτικό, το $E_4 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \ E_4([x]) = [4x]$ ή το $R_4 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \ R_4([x]) = [x + 4]$; Δικαιολογήστε εν συντομία την απάντησή σας.

(2 μονάδες)

Θέμα 5^o: Διάσταση Hausdorff και φράκταλς

α) Να ορίσετε τη διάσταση Hausdorff ενός συνόλου $K \subset \mathbb{R}^n$.

β) Να αποδείξετε ότι αν το $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι πεπερασμένο, το μηδενοδιάστατο μέτρο Hausdorff του K, $\mathcal{H}^0(K)$, ισούται με τον πληθάριθμο του K.

γ) Κατασκευάζουμε ένα «μη κλασικό σύνολο Cantor» ως εξής: από το ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1]$ της πραγματικής ευθείας κρατάμε, στο πρώτο βήμα, τα διαστήματα $[0, \frac{1}{4}]$ και $[\frac{1}{2}, 1]$ και έπειτα συνεχίζουμε κρατώντας από κάθε διάστημα μήκους a που απομένει το «αριστερό» τμήμα του, μήκους $\frac{a}{4}$, και το «δεξιό» τμήμα του, μήκους $\frac{a}{2}$. Σχεδιάστε τα δύο πρώτα βήματα της διαδικασίας, και υπολογίστε «πρακτικά» ότι η διάσταση Hausdorff του φράκταλ συνόλου που προκύπτει είναι $log_2(\frac{2}{\sqrt{5}-1})$.

δ) Κατασκευάστε ένα σύστημα επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων που να έχει ως αναλλοίωτο σύνολο το παραπάνω φράκταλ σύνολο, και υπολογίστε πάλι τη διάσταση Hausdorff αυτού, αυτή τη φορά αυστηρά.

(2.5 μονάδες)