Λύσεις Θεμάτων στη Μαθηματική Λογική

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

13 Ιουνίου 2017

Θέμα 1: α) Εξετάστε αν είναι ταυτολογίες οι προτάσεις

$$\neg A \wedge ((B \to A) \to \neg B) \quad \text{και} \quad (\neg A \wedge (B \to A)) \to B$$

β) Εξετάστε αν η πρόταση $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (A_4 \to A_5)))$ είναι ισοδύναμη με κάποια από τις προτάσεις

$$A_2 \to (A_3 \to (A_4 \to (A_1 \to A_5))) \quad \text{και} \quad (\neg A_2 \vee \neg A_4 \vee \neg A_5) \to (A_1 \wedge A_3)$$

Λύση: α) Η πρώτη προφανώς δεν είναι, αρκεί να θεωρήσουμε μιά απονομή v με $v(A) = 1$ και η πρόταση γίνεται ψευδής. Η δεύτερη παρατηρούμε επίσης ότι για $v(A) = 0$ και $v(B) = 0$ γίνεται επίσης ψευδής.

β) Χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ισοδυναμία $A_3 \to (A_4 \to A_5) \equiv (A_3 \wedge A_4) \to A_5$ βλέπουμε ότι η πρώτη είναι ισοδύναμη με την $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \to A_5$, το ίδιο και η δεύτερη. Αρα η πρώτη και η δεύτερη είναι μεταξύ τους ισοδύναμες. Παρατηρούμε επίσης ότι μιά απονομή με $v(A_1) = \ldots = v(A_5) = 0$ κάνει αληθή την πρώτη αλλά ψευδή την τρίτη, άρα η πρώτη με την τρίτη δεν είναι ισοδύναμες.

Θέμα 2: α) Γράψτε μία πρόταση ισοδύναμη με την $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee \neg A_4$ που να περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\to$ στη γραφή της.

β) Έπεκτείνουμε τη γλώσσα της Προτασιακής Λογικής εισάγοντας ένα νέο σύμβολο $\perp$ που παριστάνει μία πρόταση που είναι πάντα ψευδής. Εξηγείστε γιατί, χρησιμοποιώντας αυτό το σύμβολο, κάθε πρόταση είναι ισοδύναμη με κάποια που στη γραφή της περιέχει μόνο το σύνδεσμο $\to$.

Λύση: α) Η πρόταση είναι διαδοχικά ισοδύναμη με την $A_4 \to (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$, αυτή με την $A_4 \to \neg(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3)$, αυτή με την $A_4 \to \neg(A_1 \to (\neg A_2 \vee \neg A_3))$, κι αυτή με την $A_4 \to \neg(A_1 \to (A_2 \to \neg A_3))$.

β) Αφού γνωρίζουμε ότι το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \to\}$ είναι επαρκές, άρα κάθε πρόταση έχει ισοδύναμη που περιέχει στη γραφή της μόνο αυτούς τους συνδέσμους, αρκεί να αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του συνδέσμου $\neg$, δηλαδή κάθε $\neg A$ με μία πρόταση που περιέχει τα σύμβολα $A, \perp, \to$. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια της ισοδυναμίας $\neg A \equiv A \to \perp$.

Θέμα 3: α) Υποθέτουμε ότι για τα σύνολα προτάσεων Γ, Δ και τις προτάσεις φ, χ έχουμε $\Gamma \models \varphi \to \chi$ και $\Delta \models \varphi$. Υπάρχει πρόταση ψ ώστε $\Gamma \cup \Delta \models \neg(\psi \to \chi)$;

β) Θυμίζουμε ότι τα τρία αξιωματικά σχήματα που χρησιμοποιούνται σε τυπικές αποδείξεις είναι τα:

$$(\mathrm{A\Sigma 1})\varphi \to (\psi \to \varphi), \quad (\mathrm{A\Sigma 2})(\varphi \to ((\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)), \quad (\mathrm{A\Sigma 3})(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

Δώστε τυπική απόδειξη της πρότασης $\psi \to \varphi$ χρησιμοποιώντας ως υποθέσεις τις προτάσεις

$$\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi) \quad \text{και} \quad \chi$$

Λύση: α) Μία απονομή αληθοτιμών v που κάνει αληθείς τις προτάσεις του $\Gamma \cup \Delta$ κάνει αληθείς τόσο εκείνες του Γ όσο και του Δ, άρα δίνει $v(\varphi \to \chi) = 1$ και $v(\varphi) = 1$, επομένως και $v(\chi) = 1$. Αν υπήρχε τέτοια πρόταση θα έπρεπε να είναι και $v(\neg(\psi \to \chi)) = v(\psi \wedge \neg\chi) = 1$, δηλαδή $v(\chi) = 0$, άτοπο.

β) Η τυπική απόδειξη έχει τα εξής βήματα

ΑΣ2	$(\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi)) \to (\neg\varphi \to \chi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ (1)
Υπόθεση	$\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$ (2)
MP(1),(2)	$(\neg\varphi \to \chi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ (3)
(ΑΣ 1)	$\chi \to (\neg\varphi \to \chi)$ (4)
Υπόθεση	χ (5)
MP (4), (5)	$\neg\varphi \to \chi$ (6)
MP (3), (6)	$\neg\varphi \to \neg\psi$ (7)
ΑΣ3	$(\neg\varphi \to \neg\psi)) \to (\psi \to \varphi)$ (8)
MP (7), (8)	$\psi \to \varphi$

Θέμα 4: Θεωρούμε μία γλώσσα της Κατηγορηματικής Λογικής που περιέχει ένα συναρτησιακό σύμβολο f.

α) Γράψτε προτάσεις σ' αυτήν τη γλώσσα που να εκφράζουν για τη συνάρτηση που ερμηνεύει το f ότι ''η συνάρτης είναι επί'' και ''υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία της δομής που έχουν την ίδια εικόνα μέσω της συνάρτησης ''

β) Αποδείξτε ότι η πρόταση

$$\forall x\ (\ f(f(f(x))) = x\ \wedge\ \neg(\ f(x) = x\ )\ )$$

έχει ως συνέπειες τις $\forall x\ \neg(\ f(f(x)) = x\ )$, και $\forall x\ \neg(\ f(f(x)) = f(x)\ )$.

Λύση: α) Οι δύο ζητούμενες προτάσεις είναι η

$$\forall x \exists y (f(y) = x)\ \ (\textbf{και όχι η}\ \ \forall x \exists y (f(x) = y)$$

που πολλοί γράφουν, αφού αυτό εκφράζει απλώς ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη παντού στο πεδίο ορισμού της) και η

$$\exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge f(x) = f(y)\ \wedge\ \forall z \forall w (f(z) = f(w) \to\ ((z = w) \vee (z = x \wedge w = y) \vee (z = y \wedge z = x))))$$

β) Χρησιμοποιούμε για απλότητα συμβολισμού το ίδιο σύμβολο f για την ερμηνεία του συναρτησιακού συμβόλου σε μία δομή. Αν λοιπόν για ένα στοιχείο a μίας δομής που επαληθεύει τη δοσμένη πρόταση είχαμε $f(f(a)) = a$, τότε θα είχαμε και $f(f(f(a))) = f(a)$. Ομως για όλα τα στοιχεία της δομής έχουμε $f(f(f(a))) = a$, οπότε θα ήταν $f(a) = a$. Αυτό είναι αδύνατο γιατί για όλα τα στοιχεία της δομής έχουμε $f(a) \neq a$. Αρα σε οποιαδήποτε δομή αληθεύει η δοθείσα πρόταση δεν αληθεύει η άρνηση της $\forall x\ \neg(\ f(f(x)) = x\ )$, επομένως αληθεύει η $\forall x\ \neg(\ f(f(x)) = x\ )$.

Ομοίως αν δεν αλήθευε η $\forall x\ \neg(\ f(f(x)) = f(x)\ )$ θα είχαμε ότι υπάρχει στοιχείο a της δομής ώστε $f(f(a)) = f(a)$, άρα και $f(f(f(a))) = f(f(a))$, επομένως και $f(f(a) = a$, το οποίο είδαμε αμέσως πριν ότι οδηγεί σε άτοπο.

Θέμα 5: α) Γράψτε πρόταση σ_n της Κατηγορηματικής Λογικής, η οποία να επαληθεύεται σε μία δομή ακρίβως όταν ο φορέας της δομής αυτής έχει τουλάχιστον n στοιχεία.

β) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σύνολο προτάσεων T, σε μία γλώσσα της Κατηγορηματικής Λογικής, έτσι ώστε ώστε οι προτάσεις του να επαληθεύονται ακριβώς σε δομές που οι φορείς τους είναι πεπερασμένα σύνολα. Πείτε αν το σύνολο $T \cup \{\sigma_n \mid n \geq 1\}$ είναι επαληθεύσιμο.

γ) Αξιοποιώντας την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο T με την παραπάνω ιδιότητα.

Λύση: α)

$\exists x_1 \ldots \exists x_n\ (\neg(x_1 = x_2) \wedge \ldots \wedge \neg(x_1 = x_n) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge \ldots \neg(x_2 = x_n) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)\ )$

β) Το σύνολο αυτό προτάσεων δεν είναι επαληθεύσιμο. Αν επαληθευόταν σε κάποια δομή τότε, επειδή θα επαληθεύονταν οι προτάσεις του T ο φορέας της δομής θα έπρεπε να είναι πεπερασμένο σύνολο. Επειδή όμως θα επαληθεύονταν οι προτάσεις σ_n για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ ο φορέας της δομής θα έπρεπε να έχει περισσότερα από n στοιχεία για κάθε $n \geq 1$, πράγμα άτοπο.

γ) Αφού το σύνολο αυτό λοιπόν δεν είναι επαληθεύσιμο, κάποιο πεπερασμένο υποσύνολό του δε θα είναι επαληθεύσιμο, από το Θεώρημα του Συμπαγούς. Αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο: Αν N είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε η σ_N ν′ ανήκει στο πεπερασμένο υποσύνολο, τότε ένα σύνολο με N στοιχεία θα επαλήθευε όλες τις σ_n που βρίσκονται στο πεπερασμένο αυτό σύνολο προτάσεων, αλλά θα ήταν και φορέας μίας δομής που θα επαλήθευε τις προτάσεις του συνόλου T. Ετσι το πεπερασμένο αυτό σύνολο προτάσεων θα ήταν επαληθεύσιμο. Αρα δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων T με τη ζητούμενη ιδιότητα.