ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 7-6-17

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Έστω $\gamma(t)$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa(t) > 0$ και $\tau(t) \neq 0$ για κάθε t. Δείξτε ότι εάν το ίχνος της γ περιέχεται στη μοναδιαία σφαίρα, τότε η ισχύει η σχέση

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2}\right).$$

[20]

2. Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (2\cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3\sin^2 t + 4)$ είναι επίπεδη. **[10]**

3. Ποιό από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί κανονική επιφάνεια;

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3z^2\}, \qquad M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \sin z = y \cos z\}.$$

[10]

4. Έστω M κανονική επιφάνεια με τοπική παραμέτρηση $X(u, v)$ και απεικόνιση Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$. Έστω E, F, G τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης με $F = 0$ και e, f, g τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{\frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}}, N\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. **[5]**

(β) Δείξτε ότι $X_{uv} = \frac{E_v}{2E} X_u + \frac{G_u}{2G} X_v + fN$. **[15]**

5. Αποδείξτε ότι η επιφάνεια $z = \ln(\frac{\cos y}{\cos x})$ είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης (δηλ. $H = 0$). **[20]**

6. Έστω $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < 0,\ -\pi < v < \pi\}$ και θεωρούμε το τμήμα επιφάνειας $X(U)$ ($X : U \to X(U) \subset \mathbb{R}^3$ η τοπική παραμέτρηση). Υποθέτουμε ότι για το τμήμα αυτό ισχύει $E = G = e^u$ και $F = 0$.

(α) Βρείτε το μήκος της καμπύλης $\gamma : I \to U$, $\gamma(t) = (-1, t)$ μέσω της απεικόνισης X, από $t = 0$ στο $t = 1$.

(β) Δείξτε ότι το εμβαδό του τμήματος $X(U)$ είναι 2π. **[20]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!