

Πραγματική ανάλυση Ι. Ασκήσεις 1α

1. α. Αν $0 < a < 1$ αποδείξτε ότι $a^n[1 + n(1 - a)] \leq 1$ για κάθε φυσικό αριθμό n .
β. Αποδείξτε ότι $2^{2^n} > 2^n$ για κάθε φυσικό αριθμό n .

Λύση

α. Για $n = 1$ η πρόταση ισοδυναμεί με ή ισοδύναμα $(\dots)^2 \geq 0$ που προφανώς ισχύει.

Δέχομαι ότι ισχύει για $n = k$ και θα αποδείξω ότι ισχύει για $n = k + 1$ δηλαδή Για να εμπλέξω την σχέση $n = k$ θέτω την τελευταία σχέση στην μορφή $a\text{.....} + \dots(1 - a) \leq 1$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι έχουμε αποδεχθεί την σχέση για $n = k$ δηλαδή ≤ 1 αρκεί να αποδείξουμε ότι ≤ 1 ή ισοδύναμα $(1 - \dots)(\dots - 1) < 0$ που προφανώς ισχύει.

β. Για $n = 1$ ισχύει. Δέχομαι ότι ισχύει για $n = k$ και θα αποδείξω ότι ισχύει για $n = k + 1$ δηλαδή ή ισοδύναμα $> 2^{k+1}$. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι έχουμε αποδεχθεί την σχέση για $n = k$ αρκεί να αποδείξουμε ότι ή ισοδύναμα $k > 1$ που προφανώς ισχύει.

2. α. Αν $a^{33} < b^{33}$ αποδείξτε ότι $a < b$ με χρήση γνώσεων το πολύ Α Λυκείου όπως, αν $a > b > 0$ τότε $a^k > b^k$ ή αν a αρνητικός και k περιττός τότε a^k αρνητικός.
β. Αν $|a - b| < \epsilon$ για κάθε θετικό αριθμό ϵ τότε $a = b$.

Λύση

α. Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει θα έχουμε η περίπτωση της αποκλείεται οπότε απομένει $\dots > \dots$. Στην περίπτωση που και οι δύο είναι θα έχουμε $\dots > \dots$, στην περίπτωση που $\dots > 0 > \dots$ θα έχουμε $\dots > 0 > \dots$ και στην περίπτωση που $0 > \dots$ έχουμε διαδοχικά $-\dots > -\dots > 0$ ($-\dots$)³³ $> (-\dots)$ ³³, $-\dots$ ³³ $> -\dots$ ³³ και τελικά Και στις τρεις περιπτώσεις καταλήξαμε στο άτοπο (δηλαδή σε συμπέρασμα που αντίκειται στην αρχική μας άρνηση) οπότε το ζητούμενο συμπέρασμα ισχύει.

β. Αν το συμπέρασμα δεν ήταν αληθές θα είχαμε $\dots > 0$ οπότε η αρχική υπόθεση για $\epsilon = \dots/2$ γίνεται $\dots < \dots/2$ ή, άτοπο.

3. Αν $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{1 + x_1}$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $n = 1, 2, \dots$ αποδείξτε ότι $x_n < x_{n+1}$ και $0 < x_n < (1 + \sqrt{5})/2$, για κάθε φυσικό αριθμό n .

Λύση

Σχετικά με τον πρώτο ισχυρισμό Για $n = 1$ προφανώς τη πρόταση ισχύει. Δεχόμαστε ότι ισχύει για $n = k$ οπότε η ζητούμενη ανισότητα $a_{k+1} < a_{k+2}$ γίνεται που ισοδυναμεί με που την έχουμε αποδεχθεί. Συνεχίζοντας με το επόμενο ερώτημα, δεχόμαστε ότι ισχύει για $n = k$ οπότε η ζητούμενη ανισότητα

$0 < x_{k+1} < (1 + \sqrt{5})/2$ ισοδυναμεί με $1 + x_k < \dots$ και μετά τις στοιχειώδεις πράξεις στην που έχουμε αρχικά αποδεχθεί.