

Θεωρία Πιθανοτήτων II - Ασκήσεις III

#1. Αν οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες με κατανομές $X_1 \sim N(\mu, 1)$, $X_2 \sim N(\mu+1, 1)$, $X_3 \sim N(\mu+2, 1)$, να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu - 1)^2 + (X_3 - \mu - 2)^2$.

#2. Αν οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες με κατανομές $X_i \sim N(0, \sigma^2/i)$ $i=1, \dots, n$ να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^n \frac{i X_i^2}{\sigma^2}$ και ακολούθως η πυκνότητα της τ.μ. $\sigma^2 Y$.

#3. Θεωρούμε τις τ.μ. $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 3$, της άσκησης #2. Να δειχθεί ότι:

$$\alpha. \frac{X_1}{\sqrt{\frac{2X_2^2 + 3X_3^2}{2}}} \sim t_2, \quad \beta. 2 \cdot \frac{X_1^2}{2X_2^2 + 3X_3^2} \sim F_{1,2}$$

$$\gamma. \frac{(n-2)(X_1^2 + 2X_2^2)}{2(3X_3^2 + \dots + nX_n^2)} \sim F_{2, n-2}.$$

#4. Αν οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες με κατανομές $X_i \sim E(\lambda_i)$, $X_1 \sim E(\lambda_1)$, $X_2 \sim E(\lambda_2)$, $X_3 \sim E(\lambda_3)$ να δειχθεί ότι $2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i X_i \sim \chi_6^2$.

#5. Αν οι τ.μ. X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με (κοινή) κατανομή $E(\lambda)$, να δειχθεί ότι $\frac{X_1 + X_2}{2X_3} \sim F_{4,2}$. (Υπόδειξη: $2\lambda X_i \sim \chi_2^2$, $i=1,2,3$)

#6. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$ α.λ. $\sim N(0, \sigma^2)$. Να βρεθούν οι κατανομές των τ.μ.

$$\alpha) (X_1^2 + \dots + X_n^2)/\sigma^2 \quad \beta) \frac{\kappa(X_1^2 + \dots + X_n^2)}{n(X_{n+1}^2 + \dots + X_{n+k}^2)} \quad \gamma) \frac{\sqrt{\kappa} X_1}{\sqrt{X_{n+1}^2 + \dots + X_{n+k}^2}}$$

δ) $n(\bar{X})^2/\sigma^2$, όπου $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, ε) $\frac{n(X_1 - \bar{X})^2}{(n-1)\sigma^2}$ (Υπόδειξη για δ) και ε): να δειχθεί ότι $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ και $X_1 - \bar{X} \sim N(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2)$

#7. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 α.λ. $\sim \mathcal{U}(0,1)$ (ομοιόμορφη κατανομή). Να δείχθει ότι η τ.μ. $\frac{\ln(X_1 X_2)}{\ln(X_3 X_4)}$ έχει κατανομή $F_{4,4}$. (Υπόδειξη: $-\ln X_i \sim \mathcal{E}(1)$ και $-2\ln X_i \sim \chi^2_2, i=1, \dots, 4$)

#8. (Γενίκευση της #7) Έστω Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 α.λ. με συνεχή κατανομή και συνάρτηση κατανομής $F(y)$. Να δείχθει ότι η τ.μ. $\frac{\ln[F(Y_1)F(Y_2)]}{\ln[F(Y_3)F(Y_4)]}$ έχει κατανομή $F_{4,4}$. (Υπόδειξη: από γνωστή πρόταση, $F(Y_i) \sim \mathcal{U}(0,1), i=1, 2, 3, 4$)

#9. (Θεωρία) Αν $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομές $\chi^2_{n_1}, \chi^2_{n_2}, \dots, \chi^2_{n_k}$, αντίστοιχα, τότε $\sum_{i=1}^k X_i \sim \chi^2_n$, όπου $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. (Δηλαδή, το άθροισμα ανεξάρτητων χ^2 -τετραγώνων κατανομών είναι χ^2 -τετράγωνο με βαθμούς ελευθερίας το άθροισμα των βαθμών ελευθερίας)

#10. Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή κατανομή $N(0, \sigma^2)$, να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $\frac{X}{|Y|}$. (Υπόδειξη: $|Y| = \sqrt{Y^2}$ και $\frac{X}{|Y|} = \frac{X/\sigma}{\sqrt{Y^2/\sigma^2}}$)