Τυπική Απόδειξη και Πληρότητα στην Προτασιακή Λογική

11 Απριλίου 2017

Η ιδέα της τυπικής απόδειξης έχει την καταγωγή της στις προσπάθειες των μαθηματικών στις αρχές του 20ου αιώνα να μελετήσουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο διεξάγεται η μαθηματική δραστηριότητα με έναν τρόπο που θα είναι απαλλαγμένος από αμφησιμίες των εννοιών, κι από εξωγενείς παραδοχές οι οποίες μπορούν να αποδίδονται στην κοινή αντίληψη, την κοινή λογική ως έμφυτη στα έλλογα όντα και τον τρόπο που προσδίδουμε νόημα στις λογικές λειτουργίες (στους λογικούς συνδέσμους, εν προκειμένω). Ακολουθώντας λοιπόν το παράδειγμα των ίδιων των μαθηματικών προσπαθούν να ακολουθήσουν την αξιωματική μέθοδο και στο πεδίο της λογικής. Υιοθετούμε λοιπόν ως αξιώματα κάποιες βασικές λογικές αρχές και θεωρούμε ότι η αποδεικτική διαδικασία δεν είναι τίποτα άλλο από μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων όπου από τις βασικές αρχές (λογικά αξιώματα) παράγουμε θεωρήματα ακολουθώντας κάποιους σαφώς προσδιορισμένους κανόνες. Η επιλογή των αξιωμάτων και των κανόνων επιδιώκεται να γίνει με ένα σκοπό: Οτιδήποτε αντιλαμβανόμαστε (δια της κοινής λογικής!) ως αλήθεια να είναι αποδείξιμο με τον τυπικό τρόπο που προσδιορίζουμε στα πλαίσια ενός τέτοιου συστήματος. Αυτό είναι το αίτημα της Πληρότητας του αποδεικτικού συστήματος. Οτι, δηλαδή, αν μια πρόταση είναι ταυτολογία, τότε είναι αποδείξιμη στα πλαίσια του τυπικού συστήματος.

1 Τυπική Απόδειξη - μερικά (μετά-)θεωρήματα

Ως αξιώματα του συστήματος που θα μελετήσουμε εδώ δεχόμαστε τα παρακάτω:

Αξιωματικό Σχήμα 1 (ΑΣ1)	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$
Αξιωματικό Σχήμα 2 (ΑΣ2)	$(\ \varphi \to (\ (\psi \to \chi)\ )\ \to\ (\ (\varphi \to \psi)\ \to\ (\varphi \to \chi)\ )$
Αξιωματικό Σχήμα 3 (ΑΣ3)	$(\neg\varphi \to \neg\psi)\ \to\ (\varphi \to \psi)$

Δεχόμαστε επίσης ένα μόνο αποδεικτικό κανόνα, τον *κανόνα της απόσπασης* ή, λατινικά, Modus Ponens (MP):

αν έχουμε στην αποδεικτική ακολουθία	$\varphi \to \psi$
και	φ
συμπεραίνουμε	ψ

Μιλάμε για αξιωματικά σχήματα και όχι για αξιώματα, με την έννοια ότι αξίωμα είναι οποιοδήποτε στιγμιότυπο αυτών, δηλαδή στη θέση των φ, χ, ψ μπορεί να μπει οποιαδήποτε πρόταση, κάθε φορά που τα εγκαλούμε σε μια αποδεικτική διαδικασία (αρκεί σε κάθε θέση των φ, χ, ψ μέσα στο ίδιο στιγμιότυπο να εμφανίζεται μια και η αυτή πρόταση!).

Ονομάζουμε τυπική απόδειξη μίας πρότασης σ μια πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\sigma_1, ..., \sigma_n = \sigma$, τέτοιων ώστε κάθε σ_i να είναι είτε στιγμιότυπο αξιωματικού σχήματος ή να έχει προέλθει από εφαρμογή του αποδεικτικού κανόνα (MP) σε δύο προγούμενες προτάσεις της ακολουθίας, δηλάδη υπάρχουν σ_j, $\sigma_k = \sigma_j \to \sigma_i$, με $j, k < i$. Γράφουμε $\vdash \sigma$ για να δηλώσουμε ότι υπάρχει κάποια τυπική απόδειξη της σ.

Ονομάζουμε τυπική απόδειξη της σ από υποθέσεις στο σύνολο Σ μια αντίστοιχη ακολουθία, η οποία περιλαμβάνει (εκτός των όσων προσδιορίσαμε παραπάνω) και προτάσεις από το Σ. Γράφουμε $\Sigma \vdash \sigma$ για να δηλώσουμε ότι υπάρχει κάποια τυπική απόδειξη της σ με υποθέσεις στο σύνολο προτάσεων Σ.

Λέμε ότι το σύνολο προτάσεων Σ είναι αντιφατικό αν υπάρχει απόδειξη της αντίφασης από υποθέσεις σε αυτό, αν δηλαδή έχουμε, για κάποια πρόταση ψ, ταυτοχρόνως $\Sigma \vdash \psi$ και $\Sigma \vdash \neg\psi$. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το σύνολο προτάσεων είναι συνεπές (ή συμβιβαστό).

Παρατηρείστε ότι και οι τρεις προτάσεις που εμαφανίζονται ως αξιωματικά σχήματα είναι ταυτολογίες και ότι αν ο κανόνας MP εφαρμοστεί σε ταυτολογίες στο συμπέρασμα (τρίτο βήμα του κανόνα) θα εμφανιστεί πάλι ταυτολογία. Ο,τι αποδεικνύουμε λοιπόν στα πλαίσια ενός τέτοιου συστήματος είναι ταυτολογία. Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίστροφο.

Παράδειγμα 1: Παρουσιάζουμε εδώ μια τυπική απόδειξη της πρότασης $\varphi \to \varphi$.

ΑΣ3	$(\varphi \to (\,(\varphi \to \varphi) \to \varphi\,))\ \to\ (\,(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)\,)$
	(πήραμε εδώ $\psi = \varphi \to \varphi,\ \ \chi = \varphi$)
ΑΣ 1	$\varphi \to (\,(\varphi \to \varphi) \to \varphi\,)$
	(πήραμε εδώ $\psi = \varphi \to \varphi$)
MP	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(ΑΣ 1)	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi))$
MP	$\varphi \to \varphi$

Σχόλιο 1: Είναι ενδεικτικό της περίπλοκης φύσης της τυπικής απόδειξης το γεγονός ότι για μια τόσο προφανή αλήθεια κοπιάζουμε τόσο, στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος, για να δώσουμε μια τυπική απόδειξή της. Θα μπορούσε κάποιος να υιοθετήσει πολύ περισσότερα αξιώματα ή και κανόνες για να διευκολύνει τη ζωή του. Η χρήση περισσότερων κανόνων θα περιέπλεκε τα πράγματα αναφορικά με την απόδειξη κάποιων μετα-θεωρημάτων (όπως το Θεώρημα Απαγωγής, παρακάτω). Μένουμε επίσης πιστοί στην παράδοση της Λογικής που προσπαθεί να δώσει το δυνατόν πιο συνοπτικά τυπικά αποδεικτικά συστήματα, που όμως είναι πλήρη.

Σχόλιο 2: Εκπλήσσει ίσως το γεγονός ότι δεν εμφανίζονται στα αξιωματικά σχήματα που δίνουμε οι σύνδεσμοι $\wedge$ και $\vee$. Αυτό έχει να κάνει με την παράδοση που αναφέραμε προηγουμένως. Μένουμε σε λίγα σχήματα, τα οποία επαρκούν (όπως θα αιτιολογηθεί μέσω του Θεωρήματος Πληρότητας) για να αποδειχθούν τυπικά όλες οι αλήθειες που διέπουν τους συνδέσμους $\neg$ και $\rightarrow$. Οι υπόλοιποι, το γνωρίζουμε, είναι εκφράσιμοι (χρησιμοποιώντας ταυτολογικές ισοδυναμίες, οι οποίες έχουν σημασιολογικό χαρακτήρα) μέσω αυτών των δυο. Προσποιούμαστε λοιπόν ότι οι $\wedge$ και $\vee$ αποτελούν απλώς συντομογραφίες για τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\varphi \wedge \psi =: \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \quad \varphi \vee \psi =: \neg\varphi \rightarrow \psi$$

Ενα πρώτο χρήσιμο αποτέλεσμα γύρω από την έννοια της τυπικής απόδειξης είναι το παρακάτω, το οποίο δικαιολογεί με όρους τυπικής απόδειξης ότι από ένα αντιφατικό σύνολο προτάσεων μπορούμε να παίρνουμε ως συνέπεια οποιαδήποτε πρόταση.

1.1 Πρόταση. *Αν Γ είναι ένα σύνολο προτάσεων και φ, ψ είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις, τότε αν έχουμε ταυτόχρονα $\Gamma \vdash \psi$ και $\Gamma \vdash \neg\psi$, τότε έχουμε και $\Gamma \vdash \varphi$.*

Απόδειξη: Εχουμε

	.
υποθέσεις στο Γ	.
	.
	$\neg\psi$
ΑΣ1	$\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$
MP στα δυο προηγούμενα	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$
ΑΣ3	$(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
MP στα δυο προηγούμενα	$\psi \rightarrow \varphi$ (1)
	.
υποθέσεις στο Γ	.
	.
	ψ (2)

$$\text{MP, (1), (2)} \qquad \varphi \qquad \blacksquare$$

1.2 Θεώρημα. *(Απαγωγής) Αν Γ είναι ένα σύνολο προτάσεων και φ, ψ δύο προτάσεις, τότε*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \Gamma \vdash \varphi \to \psi$$

Απόδειξη: Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι τετριμμένη (γιατί;). Δείχνουμε λοιπόν ότι, αν $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, τότε $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Η απόδειξη εδώ βασίζεται σε μια μέθοδο την οποία δεν έχουμε συναντήσει προηγουμένως αλλά αποτελεί μια από τις βασικές μεθόδους της λογικής, ειδικώτερα εκείνου του κομματιού της που ασχολείται με την αποδεικτική ισχύ των διαφόρων τυπικών αποδεικτικών συστημάτων (και λέγεται Θεωρία Αποδείξεων). Πρόκειται για μια ακόμα εξειδίκευση της οικείας μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής (απλής ή ισχυρής, κατά περίπτωση), η οποία ονομάζεται επαγωγή στο μήκος των αποδείξεων. Ειδικά στο τυπικό αποδεικτικό σύστημα που εξετάζουμε, το οποίο έχει μόνο έναν αποδεικτικό κανόνα, κάνουμε ουσιαστικά επαγωγή στο πόσες φορές έχουμε εφαρμόσει τον αποδεικτικό κανόνα modus ponens:

Αν η απόδειξη του ψ από υποθέσεις στο σύνολο $\Gamma \cup \{\varphi\}$ έχει προκύψει εξ αιτίας του ότι ο ψ συμπτίπει με τον τύπο φ, ή είναι στιγμιότυπο αξιώματος, τότε έχουμε $\vdash \varphi \to \psi$ $(\varphi \to \varphi)$, από το παραπάνω Παράδειγμα 1.

Αν η απόδειξη του ψ από υποθέσεις στο σύνολο $\Gamma \cup \{\varphi\}$ έχει προκύψει εξ αιτίας του ότι ο ψ ανήκει στο σύνολο Γ, έχουμε ότι η $\varphi \to \psi$ αποδεικνύεται με χρήση του modus ponens από το στιγμιότυπο του ΑΣ1 $\psi \to (\varphi \to \psi)$ και την υπόθεση $\psi \in \Gamma$. Αυτό μας εξαντλεί τις περιπτώσεις κατά τις οποίες η ψ προκύπτει από μηδενική χρήση του κανόνα modus ponens από το σύνολο υποθέσεων $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι, όποτε κάποια τ προκύπτει από το σύνολο υποθέσεων $\Gamma \cup \{\sigma\}$ με εφαρμογή $k < n$ το πλήθος φορών του κανόνα modus ponens, τότε η πρόταση $\sigma \to \tau$ αποδεικνύεται από υποθέσεις στο Γ. Θα δείξουμε ότι, αν η ψ προκύπτει από το σύνολο υποθέσεων $\Gamma \cup \{\varphi\}$ με εφαρμογή n το πλήθος φορών του κανόνα modus ponens, τότε η $\varphi \to \psi$ αποδεικνύεται από υποθέσεις στο Γ.

Αφού λοιπόν η ψ έχει προκύψει από εφαρμογή του modus ponens, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο προτάσεις χ και $\chi \to \psi$ που έχουν αποδειχτεί νωρίτερα (με μικρότερο αριθμό εφαρμογών του modus ponens) στην ακολουθία της απόδειξης, χρησιμοποιώντας υποθέσεις από το σύνολο $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Η επαγωγική υπόθεση μας δίνει τότε ότι υπάρχουν αποδείξεις των $\varphi \to \chi$ και $\varphi \to (\chi \to \psi)$ με υποθέσεις μόνο στο σύνολο Γ. Τότε αναπτύσσουμε την απόδειξη αυτών σε μια απόδειξη του $\varphi \to \psi$, με υποθέσεις στο Γ:

$$\begin{array}{ll} & \cdot \\ \text{υποθέσεις στο } \Gamma & \cdot \\ & \cdot \\ & \varphi \to (\chi \to \psi) \end{array}$$

ΑΣ3	$(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
MP στα δυο προηγούμενα	$(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi)$ (1)
	.
υποθέσεις στο Γ	.
	.
	$\varphi \to \chi$ (2)
MP, (1), (2)	$\varphi \to \psi$ ∎

Παράδειγμα 2: Το Θεώρημα Απαγωγής μας διευκολύνει πάρα πολύ στη δημιουργία τυπικών αποδείξεων. Ετσι λοιπόν, αν θέλουμε να δώσουμε μια τυπική απόδειξη του $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$, αρκεί από το Θεώρημα Απαγωγής να δώσουμε μια τυπική απόδειξη του $(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ με υπόθεση την $\varphi \to \psi$. Χρησιμοποιώντας πάλι το Θεώρημα, αρκεί να δώσουμε μια τυπική απόδειξη του $\varphi \to \chi$ με υποθέσεις τις $\varphi \to \psi$ και $\psi \to \chi$, και χρησιμοποιώντας το άλλη μια φορά αρκεί να αποδείξουμε τυπικά την χ με υποθέσεις $\varphi \to \psi$, $\psi \to \chi$, φ. Αυτό όμως είναι προφανές, αν χρησιμοποιήσουμε μια φορά τον κανόνα MP για να πάρουμε πρώτα μια απόδειξη της ψ κι άλλη μια για να πάρουμε τελικά την χ.

Παράδειγμα 3: Θα δώσουμε εδώ μια τυπική απόδειξη της πρότασης φ με υπόθεση την $\neg\varphi \to \varphi$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1 και το Θεώρημα Απαγωγής. Η πρώτη μας λέει ότι υπάρχει τυπική απόδειξη $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\neg\varphi \to \varphi)$, οπότε το Θεώρημα Απαγωγής μας δίνει ότι υπάρχει τυπική απόδειξη (από το κενό σύνολο υποθέσεων) της

$$\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$$

Εχουμε επομένως

	$\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))$
ΑΣ 3	$(\neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi))) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)))$
MP	$(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$
υπόθεση	$\neg\varphi \to \varphi$
MP	$\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)$
ΑΣ 3	$(\neg\varphi \to \neg(\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
MP	$(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζοντας δύο ακόμα τυπικές αποδείξεις. Η τελευταία βασίζεται στην πρώτη και θα μας χρειαστεί στο κεντρικής σημασίας αποτέλεσμα της επόμενης παραγράφου.

1.3 Πρόταση. *Για οποιαδήποτε πρόταση φ, υπάρχει τυπική απόδειξη της $\neg\neg\varphi \to \varphi$.*

Απόδειξη: Αρκεί, λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, να αποδείξουμε την φ με υπόθεση την $\neg\neg\varphi$. Εχουμε ως στιγμιότυπο του Αξιωματικού Σχήματος 1 ότι

$$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$$

Χρησιμοποιώντας ως υπόθεση την $\neg\neg\varphi$, με εφαρμογή του Modus Ponens προκύπτει ότι

$$\vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi.$$

Ως στιγμιότυπο του Αξιωματικού Σχήματος 3 έχουμε ότι

$$\vdash (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$$

Με εφαρμογή του Modus Ponens προκύπτει ότι

$$\vdash \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$$

Πάλι από το Αξιωματικό Σχήμα 3 έχουμε

$$\vdash (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$$

Επομένως, με Modus Ponens στα δύο προηγούμενα, προκύπτει το ζητούμενο.

1.4 Πρόταση. *Για οποιεσδήποτε προτάσεις φ, ψ υπάρχει τυπική απόδειξη της*

$$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας πάλι το Θεώρημα Απαγωγής δίνουμε μία απόδειξη της $\neg\psi \to \neg\varphi$ με υπόθεση την $\varphi \to \psi$. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το στιγμιότυπο του Αξιωματικού Σχήματος 3

$$\vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

Αρκεί λοιπόν να έχουμε μία τυπική απόδειξη της $\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ με υποθέσεις τις $\varphi \to \psi$ και $\neg\psi$. Πράγματι, χρησιμοποώντας ως υποθέσεις τις $\neg\neg\varphi$ (και, τετριμμένα, τις $\varphi \to \psi$, $\neg\psi$) παίρνουμε την φ (από την προηγούμενη Πρόταση). Αυτό σημαίνει ότι με υποθέσεις τις $\neg\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\psi$ έχουμε τυπική απόδειξη της ψ. Αρα, με υποθέσεις τις $\neg\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\psi$ έχουμε τυπική απόδειξη της οποιασδήποτε πρότασης, γιατί το σύνολο αυτό των υποθέσεων είναι αντιφατικό (περιέχει την $\neg\psi$ και αποδεικνύει τυπικά και την ψ). Αρα, με υποθέσεις τις $\neg\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\psi$ έχουμε τυπική απόδειξη της $\neg\neg\psi$. Από το Θεώρημα Απαγωγής προκύπτει ότι, με υποθέσεις τις $\varphi \to \psi$ και $\neg\psi$ έχουμε τυπική απόδειξη της $\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$. Χρησιμοποιώντας το Αξιωματικό Σχήμα 3, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, παίρνουμε λοιπόν, με υποθέσεις τις $\varphi \to \psi$ και $\neg\psi$ μία τυπική απόδειξη της $\neg\psi \to \neg\varphi$, και χρησιμοποιώντας το Modus Ponens παίρνουμε, με υποθέσεις τις $\varphi \to \psi$ και $\neg\psi$ μία τυπική απόδειξη της $\neg\varphi$. Εν τέλει, το Θεώρημα Απαγωγής μας δίνει ότι, με υπόθεση τη $\varphi \to \psi$, υπάρχει τυπική απόδειξη της $\neg\psi \to \neg\varphi$.

2 Το Θεώρημα Πληρότητας

Δείχνουμε τώρα μια σειρά από Λήμματα, τα οποία οδηγούν στο Θεώρημα Πληρότητας για το συγκεκριμένο τυπικό αξιωματικό σύστημα που εισάγαμε στην προηγούμενη ενότητα, ότι δηλαδή το σύστημα αυτό είναι επαρκώς ισχυρό ώστε να αποδειχθεί τυπικά, στο πλαίσιό του, οποιαδήποτε ταυτολογία.

2.1 Λήμμα. *Ενα συνεπές σύνολο προτάσεων Σ περιέχεται ως υποσύνολο σ΄ ένα σύνολο προτάσεων $\widetilde{\Sigma}$, το οποίο είναι συνεπές και έχει την ιδιότητα ότι, για κάθε πρόταση φ, μια εκ των προτάσεων φ και $\neg\varphi$ (και μόνο μία, αφού είναι συνεπές) περιέχεται στο $\widetilde{\Sigma}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αρίθμηση των προτάσεων της γλώσσας $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...\}$ και ορίζουμε την ακολουθία των παρακάτω συνόλων προτάσεων. Θέτουμε $\Sigma_0 = \Sigma$ και, για $n > 0$,

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{αν } \Sigma_n \vdash \varphi_n \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{1}$$

Θέτουμε $\widetilde{\Sigma} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$. Είναι προφανές από την κατασκευή ότι το Σ περιέχει, για κάθε τύπο φ, έναν εκ των φ ή $\neg\varphi$. Χρειάζεται να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι συνεπές. Γι αυτό θα αρκούσε να ξέραμε ότι το κάθε Σ_n είναι συνεπές: αν υπήρχε απόδειξη κάποιας αντίφασης, σ΄ αυτό θα συμμετείχε πεπερασμένο πλήθος προτάσεων φ_n, οι οποίες θα ανήκαν επομένως σε κάποιο Σ_k, άρα κάποιο Σ_k θα ήταν ασυνεπές - άτοπο.

Το δείχνουμε λοιπόν επαγωγικά: Το Σ_0 είναι συνεπές από την υπόθεση. Αν δεχτούμε ότι το Σ_n είναι συνεπές και υποθέσουμε ότι το Σ_{n+1} δεν είναι, τότε:

Αν στην κατασκευή του Σ_{n+1} έχουμε συμπεριλάβει την πρόταση φ_n, γνωρίζουμε ότι το Σ_n έχει ως συνέπεια τη φ_n. Αν λοιπόν το Σ_{n+1} είναι αντιφατικό, τότε η αντίφαση αποδεικνύεται από υποθέσεις μόνο μέσα στο Σ_n, αφού η προσθήκη της φ_n που είναι συνέπεια του Σ_n δεν οδηγεί σε απόδειξη νέων προτάσεων από εκείνες που αποδεικνύονται με υποθέσεις στο Σ_n. Δηλαδή το Σ_n είναι αντιφατικό - άτοπο.

Αν στην κατασκευή του Σ_{n+1} έχουμε συμπεριλάβει τη $\neg\varphi_n$, τότε υποθέτοντας - προς άτοπο - ότι το Σ_{n+1} είναι αντιφατικό διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις: Υπάρχει μια απόδειξη αντίφασης που δε χρησιμοποιεί την $\neg\varphi_n$. Τότε έχουμε αποδείξει την αντίφαση χρησιμοποιώντας υποθέσεις μόνο από το Σ_n, οπότε αυτό είναι αντιφατικό - άτοπο. Διαφορετικά, υπάρχει μια απόδειξη της αντίφασης χρησιμοποιώντας υποθέσεις στο Σ_n και τη $\neg\varphi_n$. Εχουμε λοιπόν

$$\Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} \vdash \psi \ (1) \quad \text{και} \quad \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} \vdash \neg\psi,$$

ισοδύναμα, από το Θεώρημα Απαγωγής,

$$\Sigma_n \vdash \neg\varphi_n \to \psi \quad \text{και} \quad \Sigma_n \vdash \neg\varphi_n \to \neg\psi \ (2)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το ΑΣ3 και εφαρμόζοντας τον κανόνα MP παίρνουμε από το (2) ότι $\Sigma_n \vdash \psi \to \varphi_n$ (3). Εχουμε λοιπόν τώρα τώρα από το (1) και το (3) ότι $\Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} \vdash \varphi_n$, οπότε, από το Θεώρημα Απαγωγής $\Sigma_n \vdash \neg\varphi_n \to \varphi_n$. Ομως το Παράδειγμα 3, παραπάνω, μας δίνει ότι $\neg\varphi_n \to \varphi_n \vdash \varphi_n$, επομένως έχουμε εν τέλει ότι $\Sigma_n \vdash \varphi_n$ - καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο γιατί σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε συμπεριλάβει την φ_n (και όχι την άρνησή της) στο Σ_{n+1}. ∎

2.2 Λήμμα. *Αν Σ είναι ένα συνεπές σύνολο προτάσεων, τότε υπάρχει μια αποτίμηση v_0 των προτασιακών μεταβλητών έτσι ώστε, για κάθε $\sigma \in \Sigma$, $v(\sigma) = 1$.*

Απόδειξη: Επεκτείνουμε το δοθέν Σ στο συνεπές σύνολο προτάσεων $\widetilde{\Sigma}$, όπως στο προηγούμενο Λήμμα. Παρατηρούμε ότι το $\widetilde{\Sigma}$ είναι κλειστό ως προς τις τυπικές αποδεικτικές συνέπειες, δηλαδή ότι αν $\widetilde{\Sigma} \vdash \varphi$, τότε $\varphi \in \widetilde{\Sigma}$. Αυτό συμβαίνει γιατί μία απόδειξη της φ από το $\widetilde{\Sigma}$ χρησιμοποιεί μόνο πεπερασμένο πλήθος υποθέσεων από αυτό. Αρα οι υποθέσεις που χρησιμοποιούνται σε μία τέτοια τυπική απόδειξη βρίσκονται ήδη σε κάποιο $\Sigma_n \subseteq \widetilde{\Sigma}$, δηλαδή ότι $\Sigma_n \vdash \varphi$, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε ήδη συμπεριλάβει τη φ ως στοιχείο του $\widetilde{\Sigma}$, από τον τρόπο ορισμού του.

Ισχυριζόμαστε επίσης ότι το $\widetilde{\Sigma}$ έχει το χαρακτηριστικό ότι

$$\varphi \to \psi \in \widetilde{\Sigma} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \neg\varphi \in \widetilde{\Sigma} \text{ ή } \psi \in \widetilde{\Sigma}.$$

Πράγματι, αν $\varphi \to \psi \in \widetilde{\Sigma}$ και $\psi \notin \widetilde{\Sigma}$, τότε $\neg\psi \in \widetilde{\Sigma}$. Επομένως, δεδομένου ότι η $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ είναι τυπικό θεώρημα θα είχαμε, με διπλή εφαρμογή του Modus Ponens σε υποθέσεις από το $\widetilde{\Sigma}$, ότι $\neg\varphi \in \widetilde{\Sigma}$.

Αντίστροφα, αν $\neg\varphi \in \widetilde{\Sigma}$, τότε, επειδή $\varphi,\ \neg\varphi \vdash \psi$ θα είχαμε από το Θεώρημα Απαγωγής $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$, άρα $\varphi \to \psi \in \widetilde{\Sigma}$. Αν ήταν $\psi \in \widetilde{\Sigma}$, επειδή $\psi \to (\varphi \to \psi) \in \widetilde{\Sigma}$ (ως στιγμιότυπο αξιωματικού σχήματος), προκύπτει πάλι $\varphi \to \psi \in \widetilde{\Sigma}$.

Ορίζουμε τη v_0 με τον εξής τρόπο

$$v_0(A) = 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad A \in \widetilde{\Sigma}$$

Αποδεικνύουμε, με επαγωγή στο μήκος της πρότασης σ, ότι

$$v(\sigma) = 1 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad A \in \widetilde{\Sigma}$$

Προφανώς για προτασιακές μεταβλητές ο ισχυρισμός αληθεύει εξ ορισμού της v.

Αν η φ είναι η $\varphi_1 \to \varphi_2$ και δεχθούμε τον ισχυρισμό για τις φ_1, φ_2, τότε

$$\begin{aligned}
v(\varphi_1 \to \varphi_2) = 1 \quad & \text{αν και μόνο αν} \quad v(\varphi_1) = 0 \text{ ή } v(\varphi_2) = 1 \\
\text{(επαγωγική υπόθεση)} \quad & \text{αν και μόνο αν} \quad \varphi_1 \notin \widetilde{\Sigma} \text{ ή } \varphi_2 \in \widetilde{\Sigma} \\
\text{(ιδιότητα του } \widetilde{\Sigma}) \quad & \text{αν και μόνο αν} \quad \neg\varphi_1 \in \widetilde{\Sigma} \text{ ή } \varphi_2 \in \widetilde{\Sigma} \\
\text{(ιδιότητα του } \widetilde{\Sigma}) \quad & \text{αν και μόνο αν} \quad \varphi_1 \to \varphi_2 \in \widetilde{\Sigma}.
\end{aligned}$$

Αν ο φ είναι ο $\neg\psi$ και δεχθούμε τον ισχυρισμό για τον ψ, τότε

$$\begin{aligned} v(\neg\psi) = 1 &\quad \text{αν και μόνο αν} \quad v(\psi) = 0 \\ \text{(επαγωγική υπόθεση)} &\quad \text{αν και μόνο αν} \quad \text{όχι } \psi \in \widetilde{\Sigma} \\ \text{(ιδιότητα του } \widetilde{\Sigma}\text{)} &\quad \text{αν και μόνο αν} \quad \neg\psi \in \widetilde{\Sigma}. \end{aligned}$$

Προφανώς, αφού $\Sigma \subseteq \widetilde{\Sigma}$ έχουμε ότι, για κάθε $\sigma \in \Sigma$, $v(\sigma) = 1$. ∎

2.3 Θεώρημα. *(Πληρότητας της Προτασιακής Λογικής) Αν Σ είναι ένα σύνολο προτάσεων και σ οποιαδήποτε πρόταση, τότε, αν η σ είναι ταυτολογική συνέπεια του Σ ($\Sigma \models \sigma$, δηλαδή κάθε αποτίμηση που επαληθεύει όλες τις προτάσεις του Σ επαληθεύει και τη σ), υπάρχει απόδειξη της σ με υποθέσεις στο σύνολο Σ (δηλαδή $\Sigma \vdash \sigma$).*

Απόδειξη: Αν δεν υπήρχε απόδειξη της σ με υποθέσεις στο σύνολο Σ, τότε το $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ θα ήταν συνεπές. Γιατί, αν ήταν ασυνεπές, θα είχαμε, για κάποια ψ,

$$\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \vdash \psi \ (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \cup \{\neg\sigma\} \vdash \neg\psi \ (2)$$

Το (2) δίνει, από το Θεώρημα Απαγωγής, ότι $\Sigma \vdash \neg\sigma \to \neg\psi$, οπότε από το ΑΣ3 με MP, παίρνουμε $\Sigma \vdash \psi \to \sigma$, επομένως και $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \sigma$ (3). Το (1) μαζί με το (3) δίνουν $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \vdash \sigma$, άρα από το Θεώρημα Απαγωγής έχουμε $\Sigma \vdash \neg\sigma \to \sigma$. Ομως, από το Παράδειγμα 3, έχουμε $\Sigma \vdash (\neg\sigma \to \sigma) \to \sigma$, πράγμα που σημαίνει ότι $\Sigma \vdash \sigma$.

Από το παραπάνω Λήμμα, επομένως, θα υπήρχε αποτίμηση που θα καθιστούσε αληθείς όλες τις προτάσεις του Σ καθώς και τη σ - άτοπο. ∎

2.4 Θεώρημα. *(Πληρότητας της Προτασιακής Λογικής, ειδική μορφή) Για οποιαδήποτε πρόταση σ έχουμε ότι, αν η σ είναι ταυτολογία ($\models \sigma$), τότε υπάρχει τυπική απόδειξη της σ (δηλαδή, $\vdash \sigma$).*

Απόδειξη: Προφανώς αρκεί να πάρουμε $\Sigma = \emptyset$. ∎

3 Το Θεώρημα του Συμπαγούς και οι Εφαρμογές του

Ενα περαιτέρω πόρισμα των παραπάνω είναι το εξής, ιδιαίτερα χρήσιμο στις μαθηματικές εφαρμογές:

3.1 Θεώρημα. *(του Συμπαγούς, για την Προτασιακή Λογική) Ενα σύνολο προτάσεων Σ είναι επαληθεύσιμο (δηλαδή, υπάρχει αποτίμηση που καθιστά όλες του τις προτάσεις αληθείς) αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι επαληθεύσιμο.*

Απόδειξη: Προφανώς η μια κατεύθυνση είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε λοιπόν ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι επαληθεύσιμο. Τότε το σύνολο Σ είναι συνεπές: Διαφορετικά, αν αποδείκνυε κάποια αντίφαση, επειδή η απόδειξη είναι πεπερασμένη διαδικασία, θα υπήρχε ένα πεπερασμένο υποσύνολό του το οποίο είναι ασυνεπές. Ενα τέτοιο υποσύνολο του Σ όμως δε μπορεί να είναι επαληθεύσιμο, αφού μια αποτίμηση που θα καθιστούσε αληθείς τις προτάσεις του θα έπρεπε να επαληθεύει και την αντίφαση, πράγμα αδύνατο. Κάτι τέτοιο όμως αντιβαίνει την υπόθεσή μας ότι ολα τα πεπερασμένα υποσύνολα του Σ είναι επαληθεύσιμα. ∎

3.2 Πρόταση. *Μία πρόταση είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων αν και μόνο αν είναι ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου υποσυνόλου του.*

Απόδειξη: Πράγματι, από τη σκοπιά του Θεωρήματος Πληρότητας η παρατήρηση είναι σχεδόν τετριμμένη. Μια πρόταση σ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από το Σ. Ομως μια τέτοια απόδειξη είναι πάντα πεπερασμένη. Αρα η πρόταση σ είναι ταυτολογική συνέπεια του συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από το Σ, αν και μόνο αν υπάρχει τυπική απόδειξη του σ από ένα πεπερασμένο πλήθος προτάσεων του Σ, αν και μόνο αν η σ είναι ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου πλήθους προτάσεων του Σ. ∎

Αντίστοιχου χαρακτήρα είναι και η παρακάτω εφαρμογή που πραγματεύεται την έννοια του ανεξάρτητου συνόλου προτάσεων. Θυμίζουμε ότι ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται ανεξάρτητο αν, για κάθε πρόταση $\sigma \in \Sigma$, δεν ισχύει $\Sigma - \{\sigma\} \models \sigma$ (δηλαδή η κάθε πρόταση δεν είναι συνέπεια των υπολοίπων προτάσεων του συνόλου).

3.3 Πρόταση. *Ενα σύνολο προτάσεων Σ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο.*

Απόδειξη: Προφανώς αν ένα σύνολο προτάσεων είναι ανεξάρτητο τότε και κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο. Διαφορετικά θα είχαμε πως μια πρόταση σ του Σ θα ήταν ταυτολογική συνέπεια ενός πεπερασμένου πλήθους προτάσεων $\sigma_1, ..., \sigma_n$ του Σ, οπότε ούτε το Σ θα ήταν ανεξάρτητο.

Αντίστροφα, αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ανεξάρτητο και πάρουμε μία οποιαδήποτε πρόταση $\sigma \in \Sigma$ τότε, για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο προτάσεων $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$, έχουμε $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\} \not\models \sigma$ (διαφορετικά το $\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \sigma\}$ δεν θα ήταν ανεξάρτητο). Οπως παραπάνω, το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου δίνει ότι το σύνολο $\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \neg\sigma\}$ είναι επαληθεύσιμο. Αυτό συμβαίνει για κάθε επιλογή πεπερασμένου συνόλου προτάσεων του Σ που είναι διαφορετικές από τη σ. Δηλαδή συμβαίνει ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο Ξ του $(\Sigma - \{\sigma\}) \cup \{\neg\sigma\}$, το Ξ είναι επαληθεύσιμο. Από το θεώρημα του Συμπαγούς έπεται ότι το $(\Sigma - \{\sigma\}) \cup \{\neg\sigma\}$ είναι επαληθεύσιμο. Αρα, ξανά από το Θεώρημα 2.5 του βιβλίου, έπεται ότι $(\Sigma - \{\sigma\}) \not\models \sigma$. Αυτό γίνεται για οποιαδήποτε πρόταση του Σ, άρα το Σ είναι ανεξάρτητο. ∎

Κλείνουμε τη συζήτηση γύρω από το Θεώρημα του Συμπαγούς με μία εφαρμογή στη Θεωρία Γραφημάτων και ειδικότερα τον χρωματισμό χαρτών. Θυμίζουμε ότι ένα γράφημα λέγεται n-χρωματικό αν μπορούν να χρωματιστούν οι κορυφές του με n το πλήθος χρώματα κατά τέτοιον τρόπο ώστε δύο γειτονικές κορυφές (δηλαδή κορυφές που συνδέονται με κάποια ακμή) να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

3.4 Πρόταση. *Ενα γράφημα είναι n-χρωματικό αν και μόνο αν όλα τα πεπερασμένα υπογραφήματά του είναι n-χρωματικά.*

Απόδειξη: Ας είναι $\{v_i \mid i \in I\}$ το σύνολο των κορυφών του γραφήματος και $\{1, ..., n\}$ το σύνολο των χρωμάτων. Θεωρούμε το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών $\{p_{i,j} \mid i \in I,\ 1 \leq j \leq n\}$ και $\{q_{i,k} \mid i, k \in I\}$. Η πρόθεσή μας είναι η πρόταση $p_{i,j}$ να λέει «η κορυφή v_i έχει χρώμα j» και η $q_{i,k}$ να λέει ότι «η κορυφή v_i γειτονεύει με την κορυφή v_j»

Θεωρούμε το σύνολο Σ των προτάσεων:

(1) $p_{i,1} \vee ... \vee p_{i,n}$, για κάθε $i \in I$.

(2) $p_{i,j_1} \wedge \neg p_{i,j_2}$, για κάθε $i \in I$ και $j_1 \neq j_2$

(3) $(p_{i,j} \wedge q_{i,k}) \rightarrow \neg p_{k,j}$, για κάθε $i, k \in I,\ 1 \leq j \leq n$.

Διαβάζουμε τις παραπάνω προτάσεις σαν να λένε: Οι της ομάδας (1) ότι κάθε κορυφή v_i έχει ένα χρώμα από τα $1, ..., n$. Οι της ομάδας (2) ότι μία κορυφή έχει ένα μόνο χρώμα. Οι της ομάδας (3) ότι κορυφές που γειτονεύουν έχουν διαφορετικό χρώμα.

Τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι επαληθεύσιμο. Αυτό συμβαίνει γιατί όποιο τέτοιο σύνολο κι αν μας δωθεί μπορούμε να βρούμε αποτίμηση α που το επαληθεύει: Αρκεί, αν εμπλέκονται ένα πεπερασμένο πλήθος από i και k στο σύνολο αυτών των προτάσεων, να θέσουμε $\alpha(p_{i,j}) = 1$ αν η κορυφή v_i έχει χρώμα j και $\alpha(p_{i,j}) = 0$, διαφορετικά, και $\alpha(q_{i,k}) = 1$ αν η κορυφή v_i γειτονεύει με την v_k και $\alpha(q_{i,k}) = 0$, διαφορετικά. Είναι δυνατόν να βρούμε τέτοια αποτίμηση ακριβώς επειδή το γράφημα που απαρτίζεται από τις κορυφές v_i και v_k, όπου τα i και k εμφανίζονται στο δοσμένο πεπερασμένο υποσύνολο, είναι n-χρωματικό. Από το Θεώρημα του Συμπαγούς προκύπτει ότι το Σ είναι επαληθεύσιμο. Αν όμως τώρα υπάρχει αποτίμηση που κάνει όλες τις προτάσεις του Σ αληθείς τότε ολόκληρο το γράφημα είναι n-χρωματικό.