Ασκήσεις Θεωρίας Δακτυλίων

10 Απριλίου 2017

Ασκηση 1: Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ιδεώδη του δακτύλιου των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές $\mathbb{Z}[x]$:

1. το σύνολο των πολυωνύμων που ο σταθερός τους όρος είναι πολλαπλάσιο του 3.
2. το σύνολο των πολυωνύμων που έχουν συντελεστή του x^2 πολλαπλάσιο του 3.
3. το σύνολο των πολυωνύμων που το άθροισμα των συντελεστών τους είναι ίσο με 0.
4. το σύνολο των πολυωνύμων που έχουν μόνο άρτιες δυνάμεις του x.
5. το σύνολο των πολυωνύμων p που για την παράγωγό τους ισχύει $p'(0) = 0$.

Ασκηση 2: Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ιδεώδη του δακτύλιου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

1. το σύνολο των στοιχείων της μορφής (a, a) με $a \in \mathbb{Z}$.
2. το σύνολο των στοιχείων της μορφής $(2a, 0)$ με $a \in \mathbb{Z}$.
3. το σύνολο των στοιχείων της μορφής $(a, -a)$ με $a \in \mathbb{Z}$.

Ασκηση 3: Περιγράψτε πότε δύο πολυώνυμα ταυτίζονται στο δακτύλιο - πηλίκο $\mathbb{Z}[x]/I$, όπου I είναι το ιδεώδες που παράγεται από το στοιχείο $x \in \mathbb{Z}[x]$. Ποιός είναι ο πυρήνας του κανονικού ομομορφισμού $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]/I$ και με ποιό δακτύλιο είναι ισόμορφο αυτό το πηλίκο;

Ασκηση 4: Αποδείξτε ότι είναι ανάγωγα επί του $\mathbb{Z}$ τα παρακάτω πολυώνυμα:

1. $x^4 - 4x + 6$
2. $x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$
3. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ (αντικαθιστώντας το $x - 1$ στη θέση του x)

Ασκηση 5: Αν τα

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq ...$$

είναι ιδεώδη του A, αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ είναι επίσης ιδεώδες. Επίσης, ότι αν τα I_n είναι γνήσια ιδεώδη, τότε και η ένωσή τους θα είναι.

Ασκηση 6: Περιγράψτε τα στοιχεία του ιδεώδους του $\mathbb{Z}[x]$ που παράγεται από τα στοιχεία 2 και x και αποδείξτε ότι το ιδεώδες αυτό δεν είναι κύριο.

Ασκηση 7: Αν το στοιχείο a του αντιμεταθετικού δακτυλίου A είναι μηδενοδύναμο (δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a^m = 0$ και $f(x) = x^n - a$, αποδείξτε ότι το στοιχείο $\bar{x}$ (=κλάση ισοδυναμίας του x) στον δακτύλιο $A/ < f(x) >$ είναι επίσης μηδενοδύναμο.

Ασκηση 8: Εστω $f\colon A \to B$ ομομορφισμός αντιμεταθετικών δακτυλίων (με μοναδιαίο στοιχείο κι οι δύο), ο οποίος είναι επί. Αποδείξτε ότι, αν κάθε ιδεώδες του A είναι κύριο, τότε και κάθε ιδεώδες του B είναι κύριο.

Ασκηση 9: Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος και το ιδεώδες του P είναι πρώτο και δεν περιέχει μηδενοδιαιρέτες, τότε ο A είναι ακέραια περιοχή.

Ασκηση 10: Θεωρούμε μία μιγαδική ρίζα ω του πολυωνύμου $x^2 + x + 1$. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$\{a + b\omega \in \mathbb{C} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

είναι υποδακτύλιος των μιγαδικών αριθμών.

Ασκηση 11: (Πιό δύσκολη) Δείξτε ότι ο υποδακτύτλιος της παραπάνω άσκησης είναι σώμα.

Ασκηση 12: (Πιό δύσκολη) Ας είναι A ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος (που μπορεί να έχει και μηδενοδιαιρέτες), ο οποίος έχει την ιδιότητα ότι, για κάθε στοιχείο του a, $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. Αποδείξτε ότι, αν το $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ είναι μηδενοδιαιρέτης στο $A[x]$, υπάρχει $b \in A$ ώστε $ba_0 = 0$, $ba_1 = 0, ...\ ba_n = 0$.