Ιδεώδη και Σχέσεις Ισοδυναμίας Συμβιβαστές με τις Πράξεις

Π. Καραζέρης

10 Ιουνίου 2015

Εξετάζουμε εδώ την έννοια της σχέσης ισοδυναμίας που είναι συμβιβαστή με τις πράξεις μίας αλγεβρικής δομής και δείχνουμε ότι η έννοια αυτή, προκειμένου για αντιμεταθετικούς δακτύλιους αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε αυτήν του ιδεώδους, ενώ προκειμένου για τις ομάδες (όπου η διμελής πράξη δεν είναι απαραίτητα αντιμεταθετική) αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε αυτήν της κανονικής υποομάδας.

1 Δακτύλιοι - Ιδεώδη

Αν έχουμε μια αλγεβρική δομή A επί της οποίας είναι ορισμένη μια διμελής πράξη $*$, λέμε ότι μια σχέση ισοδυναμίας $R \subseteq A \times A$ είναι συμβιβαστή με την πράξη αν, οποτεδήποτε είναι $(x, x') \in R$ και $(y, y') \in R$, είναι και $(x * y, x' * y') \in R$.

Αυτή η ιδιότητα της σχέσης ισοδυναμίας σε σχέση με την πράξη μας επιτρέπει να ορίσουμε μια διμελή πράξη $*$ επί του συνόλου-πηλίκο A/R, με τον κανόνα $[x]_R * [y]_R = [x * y]_R$. Η συμβιβαστότητα της σχέσης ισοδυναμίας με την πράξη σημαίνει ακριβώς ότι η πράξη που ορίζουμε στο σύνολο-πηλίκο έχει οριστεί ορθά, δηλαδή έχουμε ορίσει μια διαδικασία $- * -\colon \frac{A}{R} \times \frac{A}{R} \to \frac{A}{R}$ που είναι συνάρτηση, δηλαδή σε ένα στοιχείο $([x]_R, [y]_R)$ του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζει ένα μοναδικά προσδιορισμένο στοιχείο του συνόλου A/R. Αυτό συμβαίνει γιατί σε ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού, ανεξαρτήτως του αν λέγεται $([x]_R, [y]_R)$ ή $([x']_R, [y']_R)$, δηλαδή αν $[x]_R = [x']_R$ και $[y]_R = [y']_R$, ή ισοδύναμα, $(x, x') \in R$ και $(y, y') \in R$, θα αντιστοιχίζεται το μοναδικά προσδιορισμένο $[x * y]_R = [x' * y']_R$ (και η ισότητα αυτή ισχύει ακριβώς επειδή $(x * y, x' * y') \in R$).

Το ίδιο μπορούμε να πούμε και σε σχέση με μία μονομελή πράξη $\widehat{(-)}\colon A \to A$: Αν έχουμε ότι, οποτεδήποτε είναι $[x]_R = [x']_R$, ισοδύναμα $(x, x') \in R$, συμβαίνει και ότι $(\hat{x}, \hat{x'}) \in R$, ισοδύναμα $[\hat{x}]_R = [\hat{x'}]_R$, τότε έχουμε ορίσει ορθά μια μονομελή πράξη $\widehat{(-)}\colon \frac{A}{R} \to \frac{A}{R}$ μέσω του κανόνα $\widehat{[x]_R} = [\hat{x}]_R$.

Εστω τώρα ότι R είναι μια σχέση ισοδυναμίας συμβιβαστή με τις πράξεις μίας αλγεβρικής δομής. Είναι φανερό ότι οποιαδήποτε ιδιότητα αφορά σε πράξεις, του είδους

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ (\ x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3\ ) \qquad \text{ή} \qquad \forall x \ (\ x * \hat{x} = \hat{x} * x\ ),$$

εφόσον αληθεύει για τη δομή A (δηλαδή όταν τα x, x_1, x_2, x_3 αναφέρονται σε στοιχεία της A), θα αληθεύει και για τη δομή A/R. Γιατί τα οποιοδήποτε στοιχεία x, x_1, x_2, x_3 της δομής A/R είναι της μορφής $x = [u]_R,\ x_1 = [u_1]_R,\ x_2 = [u_2]_R,\ x_3 = [u_3]_R$, οπότε, πχ,

$$\begin{aligned} x_1 * (x_2 * x_3) &= [u_1]_R * ([u_2]_R * [u_3]_R) \\ &= [u_1]_R * [u_2 * u_3]_R \\ &= [u_1 * (u_2 * u_3)]_R \\ (??) &= [(u_1 * u_2) * u_3]_R \\ &= [u_1 * u_2]_R * [u_3]_R \\ &= ([u_1]_R * [u_2]_R) * [u_3]_R \\ &= (x_1 * x_2) * x_3, \end{aligned}$$

όπου η ισότητα (??) δηλώνει ότι η δομή A έχει την αντίστοιχη ιδιότητα (ενώ οι λοιπές ισότητες προκύπτουν από ορισμούς και μόνο). Ισχύουν επίσης αντίστοιχες ιδιότητες που εμπλέκουν κάποια σταθερά στοιχεία, όπως πχ την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e για την πράξη $*$, τότε η κλάση του $[e]_R$ λειτουργεί ως ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $*$ όπως αυτή ορίζεται μεταξύ κλάσεων ισοδυναμίας, αφού για κάθε $x = [u]_R\ \in A/R$ έχουμε

$$x * [e]_R = [u]_R * [e]_R = [u * e]_R = [u]_R = x$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξής

1.1 Πρόταση. *Αν A είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος και R είναι μια σχέση ισοδυναμίας που είναι συμβιβαστή με τις διμελείς πράξεις $+$, $\cdot$ και τη μονομελή πράξη $-()$, τότε το σύνολο-πηλίκο A/R με πράξεις που δίνονται από τους κανόνες $[x]_R + [y]_R = [x+y]_R$, $[x]_R \cdot [y]_R = [x \cdot y]_R$, $-[x]_R = [-x]_R$ και ουδέτερα στοιχεία $[0]_R$, $[1]_R$ για τις πράξεις $+$ και $\cdot$, αντίστοιχα, αποκτά δομή αντιμεταθετικού δακτυλίου.*

Οταν η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του αντιμεταθετικού δακτυλίου A, συμβιβαστή με τις πράξεις του δακτυλίου $+$, $\cdot$, $-()$, τότε το σύνολο

$$I_R = \{x - y \in A \mid (x, y) \in R\}$$

(ο συμβολισμός δηλώνει ότι πρόκειται για ένα υποσύνολο που εξαρτάται από τη σχέση R) έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $0 \in I_R$: Γιατί, για κάθε $x \in A$, $0 = x - x$ και $(x, x) \in R$.

(ii) Αν $a \in I_R$ και $b \in I_R$, τότε $a + b \in I_R$: Γιατί $a = x - y$, $b = u - v$, με $(x, y) \in R$, $(u, v) \in R$, οπότε $a + b = (x + u) - (y + v)$, με $(x + u, y + v) \in R$.

(iii) Αν $a \in I_R$, τότε $-a \in I_R$: Γιατί $a = u - v$ με $(u, v) \in R$, οπότε $(v, u) \in R$ και $-a = v - u$.

(iv) Αν $a \in I_R$ και $x \in A$, τότε $ax \in I_R$: Γιατί $a = u - v$, με $(u, v) \in R$, οπότε δεδομένου ότι $(x, x) \in R$, $ax = (u - v)x = ux - vx$, με $(ux, vx) \in R$.

Αντιστρόφως, αν $I \subseteq A$ είναι ένα υποσύνολο του αντιμεταθετικού δακτυλίου, το οποίο έχει τις ιδιότητες (i), (ii), (iii), (iv) που είδαμε παραπάνω, το

$$R_I = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y \in I\}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας συμβιβαστή με τις πράξεις του δακτυλίου (πάλι ο συμβολισμός υποδηλώνει μια σχέση που εξαρτάται από το σύνολο I).

Η R_I είναι σχέση ισοδυναμίας γιατί

•Είναι ανακλαστική: Για κάθε $x \in A$, $(x, x) \in R_I$ αφού $x - x = 0 \in I$.

• Είναι συμμετρική αφού αν $(x, y) \in R_I$, τότε $x - y \in I$, οπότε και $y - x = -(x - y) \in I$, άρα και $(y, x) \in R_I$.

• Είναι μεταβατική, αφού αν $(x, y) \in R_I$ και $(y, z) \in R_I$, τότε $x - y \in I$ και $y - z \in I$, άρα $x - z = (x - y) + (y - z) \in I$, δηλαδή $(x, z) \in R_I$.

Έπίσης

• Η R_I είναι συμβιβαστή με την πρόσθεση, αφού αν $(x, y) \in R_I$ και $(x', y') \in R_I$, τότε $x - y \in I$ και $x' - y' \in I$, άρα και $(x + x') - (y + y') = (x + y) - (x' + y') \in I$.

• Η R_I είναι συμβιβαστή με τον πολλαπλασιασμό, αφού αν $(x, y) \in R_I$ και $(x', y') \in R_I$, τότε $x - y \in I$ και $x' - y' \in I$, άρα και $xx' - yy' = xx' - yx' + yx' - yy' = (x - y)x' + y(x' - y') \in I$, δεδομένου ότι $(x - y)x' \in I$, $y(x' - y') \in I$, από την ιδιότητα (iv). Επομένως $(xx', yy') \in R_I$.

• Τέλος, η R είναι συμβιβαστή με την πράξη του αντιθέτου, αφού αν $(x, y) \in R_I$, τότε επειδή $(-1, -1) \in R_I$, έχουμε και $(-1)x, (-1)y = (-x, -y) \in R_I$, βασιζόμενοι στη συμβιβαστότητα της σχέσης με τον πολλαπλασιασμό που δείξαμε μόλις παραπάνω.

Είναι προφανές ότι οι δύο διαδικασίες που ορίσαμε παρπάνω, ανάμεσα σε σχέσεις ισοδυναμίας συμβιβαστές με τις πράξεις του αντιμεταθετικού δακτυλίου και υποσύνολα του δακτυλίου που έχουν τις ιδιότητες (i), (ii), (iii), (iv) είναι αντίστροφες η μία στην άλλη, δηλαδή $I = I_{R_I}$ και $R = R_{I_R}$. Υποσύνολα του αντιμεταθετικού δακτυλίου με τις ιδιότητες αυτές ονομάζονται **ιδεώδη**.

Δεδομένου ενός ιδεώδους $I \subseteq A$, η κλάση ισοδυναμίας $[x]_{R_I}$ ενός στοιχείου $x \in A$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που προσδιορίζει το ιδεώδες είναι, εξ ορισμού, το σύνολο

$$\{y \in A \mid (y,x) \in R_I\} = \{(y \in A \mid y - x \in I\} = \{y \in A \mid y = x + u,\ u \in I\}$$

Συνηθίζεται λοιπόν να γράφουμε $x + I = \{x + u \mid u \in I\}$ για την κλάση ισοδυναμίας του x ως προς τη σχέση ισοδυναμίας R_I.

2 Ομάδες - Κανονικές Υποομάδες

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στη δομή της ομάδας. Εχουμε δει (στην απόδειξη του Θεωρήματος του Lagrange) ότι η σχέση $R_H \subseteq G \times G$, επί μιας ομάδας G, που ορίζεται με βάση μια υποομάδα $H \leq G$ μέσω του κανόνα

$$(x,y) \in R_H \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad xy^{-1} \in H$$

είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ρωτάμε λοιπόν αν αυτή η σχέση ισοδυναμίας είναι συμβιβαστή με τη διμελή πράξη της ομάδας. Αυτό θα σήμαινε ότι αν είχαμε $(x_1,y_1) \in R_H$, $(x_2,y_2) \in R_H$, δηλαδή $x_1y_1^{-1} = h_1 \in H$ και $x_2y_2^{-1} = h_2 \in H$, θα θέλαμε να είναι και $(x_1x_2, y_1y_2) \in R_H$, δηλαδή $x_1x_2(y_1y_2)^{-1} = x_1x_2y_2^{-1}y_1^{-1} \in H$. Γνωρίζοντας ότι γινόμενα στοιχείων μίας υποομάδας βρίσκονται στην υποομάδα, θα μας αρκούσε για κάτι τέτοιο να είναι το $x_1x_2y_2^{-1}y_1^{-1} = x_1h_2y_1^{-1}$ ίσο με ένα στοιχείο $hx_1y_1^{-1}$, δηλαδή να μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα γινόμενο της μορφής xh, με $h \in H$, ως $h'x$, για κάποιο $h' \in H$.

Λέμε λοιπόν ότι μια υποομάδα H της G είναι **κανονική** αν, για κάθε $x \in G$, για κάθε $h \in H$, υπάρχει $h' \in H$ ώστε $xh = h'x$.

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα αυτή της υποομάδας μας εξασφαλίζει κι ότι η σχέση ισοδυναμίας είναι συμβιβαστή με την πράξη του αντιστρόφου: Αν $(x,y) \in R_H$, τότε $xy^{-1} = h \in H$, οπότε $y^{-1} = x^{-1}h$, άρα υπάρχει $h' \in H$ ώστε $y^{-1} = h'x^{-1}$, επομένως $x^{-1} = h'^{-1}y^{-1}$, άρα και $x^{-1}(y^{-1})^{-1} = h'^{-1} \in H$. Το τελυταίο σημαίνει ότι $(x^{-1}, y^{-1}) \in R_H$. Δείξαμε λοιπόν ότι

2.1 Πρόταση. *Αν H είναι μια κανονική υποομάδα της G, τότε η σχέση ισοδυναμίας R_H είναι συμβιβαστή με τις πράξεις της ομάδας.*

Αντιστρόφως, αν $R \subseteq G \times G$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί της ομάδας G που είναι συμβιβαστή με τις πράξεις της ομάδας, θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$H_R = \{xy^{-1} \in G \mid (x,y) \in R\}$$

είναι κανονική υποομάδα της G.

- $1 = xx^{-1} \in H_R$ γιατί για κάθε $x \in G$, $(x,x) \in R$.

- Αν $x_1y_1^{-1} \in H_R$ και $x_2y_2^{-1} \in H_R$, δηλαδή $(x_1, y_1) \in R$ και $(x_2, y_2) \in R$ τότε, επειδή η R είναι ανακλαστική σχέση, οπότε έχουμε και $(y_1^{-1}, y_1^{-1}) \in R$ καθώς και $(x_2^{-1}, x_2^{-1}) \in R$ παίρνουμε εν τέλει από τη συνβιβαστότητα της R με την πράξη του πολλαπλασιασμού της ομάδας ότι

  $$(x_1y_1^{-1}, y_2x_2^{-1}) = (x_1y_1^{-1}x_2x_2^{-1}, y_1y_1^{-1}y_2x_2^{-1}) \in R,$$

  επομένως $x_1y_1^{-1}x_2y_2^{-1} \in H_R$

- Αν $xy^{-1} \in H_R$, τότε $(x, y) \in R$, άρα και $(y, x) \in R$, οπότε $yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in H_R$

Δείξαμε λοιπόν ως εδώ ότι η H_R είναι υποομάδα της G.

Τέλος έχουμε

- Αν $g \in G$, $h = xy^{-1} \in H_R$ (δηλαδή $(x, y) \in R$), τότε επειδή $(g, g) \in R$, άρα και $(gx, gy) \in R$, επομένως $gxy^{-1}g^{-1} = gx(gy)^{-1} = h' \in H_R$, προκύπτει ότι

  $$gh = gxy^{-1} = gxy^{-1}g^{-1}g = h'g,$$

  άρα η H_R είναι κανονική υποομάδα.

Οπως στην περίπτωση των αντιμεταθετικών δακτυλίων είναι προφανές από τους ορισμούς ότι οι δύο διαδικασίες που αντιστοιχίζουν σε μια κανονική υποομάδα μια σχέση ισοδυναμίας συμβιβαστή με τις πράξεις της ομάδας, αφ΄ ενός, και σε μία τέτοια σχέση ισοδυναμίας μια κανονική υποομάδα, αφ΄ εταίρου, είναι αντίστροφες η μια στην άλλη. Εχουμε δηλαδή $H_{R_H} = H$ και $R_{H_R} = R$.

Επίσης, όπως στην περίπτωση των αντιμεταθετικών δακτυλίων έχουμε ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $g \in G$, ως προς τη σχέση ισοδυναμίας R_H που προσδιορίζει μια κανονική υποομάδα H, είναι το σύνολο

$$\{y \in G \mid (y, g) \in R_H\} = \{y \in G \mid yg^{-1} \in H\} = \{y \in G \mid y = hg,\ h \in H\}$$

Συνηθίζεται λοιπόν να γράφουμε $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ για την κλάση ισοδυναμίας του g.